はじめに　(線形代数 IIA)

$\boxed{\text{線形代数 II} \quad = \quad \text{線形代数 I のつづき}}$

教科書　「やさしい線形代数，H．アントン著，山下純一訳」現代数学社

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと．
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 $\longrightarrow$ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

4.5　基底と次元

1 次元，2 次元，3 次元，$\cdots$　次元とは何か？

定義 (基底)

V : 線形空間.

$\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_r$ が V の 基底

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} (1)\ \mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_r \text{ は 1 次独立} \\ (2)\ \mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_r \text{ は } V \text{ を張る (i.e. } V = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_r\}) \end{cases}$$

例

$\mathbb{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbb{e}_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$: $\mathbb{R}^n$ の標準単位ベクトル.

$\mathbb{e}_1, \dots, \mathbb{e}_n$ は 1 次独立であり，$\forall \mathbb{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ は

$\mathbb{v} = v_1\mathbb{e}_1 + \cdots + v_n\mathbb{e}_n$ とかける，i.e. $\mathbb{R}^n = \mathrm{Span}\{\mathbb{e}_1, \dots, \mathbb{e}_n\}$.

$\therefore$ $\mathbb{e}_1, \dots, \mathbb{e}_n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底.

例

$\mathbb{v}_1 = (1,2,1), \mathbb{v}_2 = (2,9,0), \mathbb{v}_3 = (3,3,4) \in \mathbb{R}^3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底.

$\because$ $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3$ が 1 次独立を示すには,

$k_1\mathbb{v}_1 + k_2\mathbb{v}_2 + k_3\mathbb{v}_3 = \mathbb{o} \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0$ を示せばよい．これは,

$k_1\mathbb{v}_1 + k_2\mathbb{v}_2 + k_3\mathbb{v}_3 = k_1(1,2,1) + k_2(2,9,0) + k_3(3,3,4) =$

$(k_1 + 2k_2 + 3k_3, 2k_1 + 9k_2 + 3k_3, k_1 + 4k_3)$ より,

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 = 0 \\ k_1 + 4k_3 = 0 \end{cases}$$ の解が $(k_1, k_2, k_3) = (0,0,0)$ のみをいえばよい.

$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3\}$ となるには，$\forall \mathbb{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ が

$\mathbb{b} = k_1\mathbb{v}_1 + k_2\mathbb{v}_2 + k_3\mathbb{v}_3$ とかければよい．これは,

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + 3k_3 = b_1 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 = b_2 \\ k_1 + 4k_3 = b_3 \end{cases}$$ が $\forall \mathbb{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に対して，解ければよい.

しかし，これはどちらも $\det A \neq 0$ をいえばよい.

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ より，A は可逆. $\therefore$ $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底.

例

$1, X, \ldots, X^n$ は $\mathbb{R}[X]_n$ (n 次以下の多項式全体) の基底.
$\because$ $c_0 + c_1 X + \cdots + c_n X^n = 0 \Rightarrow c_0 = \cdots = c_n = 0$ より，$1, X, \ldots, X^n$ は 1 次独立. $\forall f(X) \in \mathbb{R}[X]_n$ は，$f(X) = c_0 \cdot 1 + c_1 X + \cdots + c_n X^n$ とかける．i.e. $\mathbb{R}[X]_n = \mathrm{Span}\{1, X, \ldots, X^n\}$.

例

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

は $M_{2,2}$ (2×2 行列全体) の基底.
$\because$ $aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4 = \mathbf{O}$ (零行列) $\Rightarrow a = b = c = d = 0$ より，M_1, M_2, M_3, M_4 は 1 次独立. $\forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}$ は，$M = aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4$ とかける．i.e. $M_{2,2} = \mathrm{Span}\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$.

例

$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r \in V$: 1 次独立 $\Rightarrow \mathbb{v}_1 \ldots, \mathbb{v}_r$ は $W = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r\}$ の基底.

定義 (有限次元，無限次元)

V：線形空間，$V \neq \{0\}$.

V が <u>有限次元</u> $\overset{\text{def}}{\iff}$ V は有限個のベクトルからなる基底をもつ.

V は有限次元でないとき，<u>無限次元</u> という.

例

$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[X]_n$ (n 次以下の多項式全体), $M_{2,2}$ (2×2 行列全体) は有限次元.

$\mathbb{R}[X]$ (多項式全体) は無限次元.

定理 7

V : 線形空間, $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n \in V$: V の基底.
V の $n+1$ 個以上のベクトルは 1 次従属. ($V = \mathbb{R}^n$ のときが定理 6)

(証明) $\mathbb{w}_1, \ldots, \mathbb{w}_m \in V$ $(m \geq n+1)$ とする. $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n \in V$ は基底より,

$$\begin{cases} \mathbb{w}_1 = a_{11}\mathbb{v}_1 + \cdots + a_{n1}\mathbb{v}_n \\ \quad\vdots \\ \mathbb{w}_m = a_{1m}\mathbb{v}_1 + \cdots + a_{nm}\mathbb{v}_n. \end{cases}$$

$k_1\mathbb{w}_1 + \cdots + k_m\mathbb{w}_m = \mathbb{o} \Rightarrow$
$k_1(a_{11}\mathbb{v}_1 + \cdots + a_{n1}\mathbb{v}_n) + \cdots + k_m(a_{1m}\mathbb{v}_1 + \cdots + a_{nm}\mathbb{v}_n) =$
$(k_1a_{11} + \cdots + k_ma_{1m})\mathbb{v}_1 + \cdots + (k_1a_{n1} + \cdots + k_ma_{nm})\mathbb{v}_n = \mathbb{o}$.
$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ は 1 次独立より,

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + \cdots + a_{1m}k_m = 0 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}k_1 + \cdots + a_{nm}k_m = 0. \end{cases}$$

これを $k_1, \ldots, k_m$ についての連立 1 次方程式とみなすと, 変数の個数 $= m > n =$ 方程式の本数より, $(k_1, \ldots, k_m) \neq (0, \ldots, 0)$ なる解がある.
(定理 6 と同様に教 p.31 定理 1) $\therefore$ $\mathbb{w}_1, \ldots, \mathbb{w}_m$ は 1 次従属. □

定理 8

有限次元の線形空間 V の基底は (常に) 一定の個数のベクトルからなる.

(証明) $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ と $\mathbb{v}'_1, \ldots, \mathbb{v}'_m$ を V の基底とする.
$\mathbb{v}'_1, \ldots, \mathbb{v}'_m$ は 1 次独立より, $m \leq n$. (定理 7 の対偶)
$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ は 1 次独立より, $n \leq m$. (定理 7 の対偶)
$\therefore\ m = n$. $\square$

定義 (次元)

V : 線形空間, $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n \in V$: 基底のとき, (定理 8 より) V の次元は n であるといい, $\dim V = n$ とかく. ($\dim \{\mathbb{o}\} := 0$ とする.)

例

$\dim \mathbb{R}^n = n$, $\dim \mathbb{R}[X]_n = n + 1$, $\dim M_{2,2} = 4$. $\quad (\dim M_{m,n} = mn)$