はじめに　(線形代数 IIA)

線形代数 II　＝　線形代数 I のつづき

教科書　「やさしい線形代数，H．アントン著，山下純一訳」現代数学社

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと．
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 $\longrightarrow$ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

例

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad\quad + x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \qquad\quad - x_5 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 \ + x_4 \ + x_5 = 0 \end{cases}$$

の解空間 W の次元をもとめる．解は,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = s\,\mathbb{v}_1 + t\,\mathbb{v}_2.$$

$W = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2\}$ であり,

$k_1\mathbb{v}_1 + k_2\mathbb{v}_2 = \mathbb{o} \Rightarrow k_1 = k_2 = 0$ より，$\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2$ は 1 次独立.

$\therefore$ $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2$ は W の基底.

$\therefore$ $\dim W = 2$.

定理 9

V：線形空間，$\dim V = n$.
(a) $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n \in V$ が 1 次独立 $\Rightarrow$ $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ は V の基底；
(b) $V = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ は V の基底；
(c) $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r$ が 1 次独立 $(r < n)$ $\Rightarrow$ ベクトル $\mathbb{v}_{r+1}, \ldots, \mathbb{v}_n$ を追加して，V の基底 $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r, \mathbb{v}_{r+1}, \ldots, \mathbb{v}_n$ を構成できる．(基底の延長 という)

(証明) (a) $V = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\}$ を示す．($\supset$) は OK. ($\supsetneq$) と仮定 (し，矛盾を導く) $\Rightarrow$ $\exists \mathbb{v} \in V$ s.t. $\mathbb{v} \notin \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{v}, \mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ は 1 次独立 $\Rightarrow$ 定理 7 ($n+1$ 個以上のベクトルは 1 次従属) に矛盾.
(b) $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ が 1 次独立を示す．$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ が 1 次従属と仮定 (し，矛盾を導く)．$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ の中で，1 次独立な最大個数を $r\,(< n)$ とし，(必要ならば入れ替えて) $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r$ を 1 次独立とする $\Rightarrow$ 残りの $\mathbb{v}_{r+1}, \ldots, \mathbb{v}_n \in \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r\}$ $\Rightarrow$ $V = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r\}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r$ は V の基底 $\Rightarrow$ 定理 8 (基底の個数は一定) に矛盾.
(c) $\mathbb{v}_{r+1} \notin \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_r\}$ をとる．$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_{r+1}$ は 1 次独立.
$r+1 = n$ $\Rightarrow$ (a) より証明終．$r+1 < n$ $\Rightarrow$ $\mathbb{v}_{r+2}$ を加え，同様に繰り返していけば，$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_{r+k} = \mathbb{v}_n$ は 1 次独立で，(a) より証明終. □

4.6　行列の行空間と列空間；階数；基底の構成

定義 (行空間，列空間)

$m \times n$ 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ に対して，

$\mathbb{r}_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, \mathbb{r}_m = (a_{m1}, \dots, a_{mn})$ を A の行ベクトル,

$\mathbb{c}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \mathbb{c}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ を A の列ベクトルという.

$R(A) := \mathrm{Span}\{\mathbb{r}_1, \dots, \mathbb{r}_m\} \subset \mathbb{R}^n$: A の行空間 (row space)

$C(A) := \mathrm{Span}\{\mathbb{c}_1, \dots, \mathbb{c}_n\} \subset \mathbb{R}^m$: A の列空間 (column space).

例

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ に対し，$R(A) = \mathrm{Span}\{\mathbb{r}_1, \mathbb{r}_2\}$, $C(A) = \mathrm{Span}\{\mathbb{c}_1, \mathbb{c}_2, \mathbb{c}_3\}$.

定理 10

行列 A を行基本変形しても，行空間 $R(A)$ は変化しない．
i.e. $A \to B$: 行基本変形 $\Rightarrow R(A) = R(B)$.

(証明) 行基本変形
1. ある行を k $(\neq 0)$ 倍する
2. 2 つの行を交換
3. ある行に別の行の k 倍を加える

のうち，2. は $R(A) = R(B)$ となる．1. または 3. で A の行ベクトル $\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_m$ から B の行ベクトル $\mathbb{r}'_1, \ldots, \mathbb{r}'_m$ がえられたとすると，$R(B) = \mathrm{Span}\{\mathbb{r}'_1, \ldots, \mathbb{r}'_m\} \subset R(A) = \mathrm{Span}\{\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_m\}$. $A \to B$ のとき $B \to A$ (逆の基本変形) とできるので，$R(A) \subset R(B)$ も従う． □

定理 11(定理 10 の系)

行列 A のガウス行列の $\mathbb{o}$ でない行ベクトル $\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_r$ は $R(A)$ の基底.

注意

ガウス行列や先頭の 1 (初 1) を復習しておくこと．(教 p.17)

例

$V = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3, \mathbb{v}_4\} \subset \mathbb{R}^5$,
$\mathbb{v}_1 = (1, -2, 0, 0, 3)$, $\mathbb{v}_2 = (2, -5, -3, -2, 6)$,
$\mathbb{v}_3 = (0, 5, 15, 10, 0)$, $\mathbb{v}_4 = (2, 6, 18, 8, 6) \in \mathbb{R}^5$.
V の基底と次元をもとめよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$ とすれば，$R(A) = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3, \mathbb{v}_4\}$.

行基本変形によってガウス行列をもとめると：

$$A \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ 定理 11 より，$V = R(A)$ の基底は,

$\mathbb{w}_1 = (1, -2, 0, 0, 3)$, $\mathbb{w}_2 = (0, 1, 3, 2, 0)$, $\mathbb{w}_3 = (0, 0, 1, 1, 0)$ であり,
$\dim V = 3$.