はじめに　(数学基礎 B1)

数学基礎 B　＝　線形代数

教科書「要点明解　線形数学　三訂版」培風館

(第 1 章　ベクトル)

- 第 2 章　行列
- 第 3 章　連立 1 次方程式

(第 4 章　行列式)

(第 5 章　行列の対角化)

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと．
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 $\longrightarrow$ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

第 2 章　行列

連立 1 次方程式を解いてみる！

まず，簡単な場合のみ …

式の本数 $m = 2$
変数の数 $n = 2$ …　x, y

例 1

$$\begin{cases} 2x + 3y &= 1 \quad \cdots (1) \\ 6x + 9y &= 4 \quad \cdots (2) \end{cases}$$

をみたす x, y は？

$(2) - 3 \times (1) : 0 = 1$　？？？？？？？

<u>解なし</u>

例 2

$$\begin{cases} x + 2y &= 3 \quad \cdots (1) \\ 2x + 4y &= 6 \quad \cdots (2) \end{cases}$$

をみたす x, y は？

$(2) - 2 \times (1) : 0 = 0$ ？？？？？？？

$0 = 0 \quad \cdots (3)$

(1) かつ (2) の解 $\iff$ (1) かつ (3) の解 $\iff$ (1) の解

<u>解は $x + 2y = 3$ をみたす全ての x, y</u>

注意

解は無数にあり，すべて直線 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ 上にのっている

例 3

$$\begin{cases} 2x + \quad y &= 3 \quad \cdots (1) \\ 3x + 2y &= 2 \quad \cdots (2) \end{cases}$$

をみたす x, y は？

$2 \times (1) - (2) : x = 4 \quad \cdots (3)$

$((2) - 3 \times (3)) \times \frac{1}{2} : y = -5 \quad \cdots (4)$

(1) かつ (2) の解 $\Longleftrightarrow$ (2) かつ (3) の解 $\Longleftrightarrow$ (3) かつ (4) の解

<u>解は $(x, y) = (4, -5)$ のみ</u>

注意

上で行ったり来たり ($\Longleftrightarrow$) できることが重要
片向き $\Leftarrow, \Rightarrow$ だと全ての解をもれなくぴったり求めたとは言えない

- 一般の場合は？

式の数 m $\cdots$ 多い
変数の数 n $\cdots$ x, y, z, w $\cdots$ 多い

$x_1, x_2, \ldots, x_{100}, \ldots$　多い
$\cdots$ 大変なので「行列」を用いる

上の例 3

$$\begin{cases} 2x + y &= 3 \\ 3x + 2y &= 2 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x &= 4 \\ 3x + 2y &= 2 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x &= 4 \\ y &= -5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

定義 ($m \times n$ 行列 A)

$$
\begin{array}{r}
\text{第 1 行} \\
\text{第 2 行} \\
\vdots \\
\text{第 } m \text{ 行}
\end{array}
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix},
$$

$$
A = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}
\text{第 1 列} & \text{第 2 列} & \cdots & \text{第 } n \text{ 列}
\end{array} \\
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

i 行 j 列にある a_{ij} を行列 A の $\underline{(i, j) \text{ 成分}}$ という.
$\underline{A = (a_{ij})}$ とかく.

定義 (行ベクトル，列ベクトル)

$1 \times n$ 行列 $(a_1, \cdots, a_n)$ を長さ n の <u>行ベクトル</u>,

$m \times 1$ 行列 $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ を長さ m の <u>列ベクトル</u> という.

注意

行列 $A = (a_{ij})$ は，行ベクトル，列ベクトルを用いて

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbb{a}_m \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \mathbb{a}_1 &= (a_{11}, \cdots, a_{1n}) \\ &\vdots \\ \mathbb{a}_m &= (a_{m1}, \cdots, a_{mn}) \end{aligned}$$

$$A = (\mathbb{b}_1, \cdots, \mathbb{b}_n) \quad \mathbb{b}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \cdots, \mathbb{b}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

ともかける．教科書の太字 $\mathbf{a}_1$ は <u>手書きでは二重線 $\mathbb{a}_1$ でかく</u>.

例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

$\underline{2 \times 2 \text{ 行列}}$ $\underline{2 \times 2 \text{ 行列}}$ 2×3 行列

$m \times n$ 行列どうしは <u>同じ型</u> という

定義 ($A = B$)

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ を同じ型の行列とする.

<u>A と B は等しい</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ すべての i, j に対して，$a_{ij} = b_{ij}$.

A と B は等しいとき，<u>$A = B$</u> とかく.

- $\boxed{\text{def} \cdots \text{definition(定義)}}$

定義 (零行列)

$A = (a_{ij})$ を行列とする．

A は <u>零行列</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ すべての i, j に対して，$a_{ij} = 0$.

A が零行列のとき，$\underline{A = \boldsymbol{O}}$ とかく：

$$\boldsymbol{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

定義 (正方行列)

$n \times n$ 行列を <u>n 次正方行列</u> という．

- 正方行列は実際にかくと正方形

定義 (行列 A と B の和，差，定数倍)

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ を同じ型の行列，c を実数とする．

$A + B := (a_{ij} + b_{ij})$ 　 $\underline{A \text{ と } B \text{ の和}}$

$A - B := (a_{ij} - b_{ij})$ 　 $\underline{A \text{ と } B \text{ の差}}$

$cA := (ca_{ij})$ 　 $\underline{A \text{ の } c \text{ 倍}}$

- $\boxed{X := Y \text{ は } X \text{ を } Y \text{ で定義する という記号}}$

定理 2.1

A, B, C を同じ型の行列，$\boldsymbol{O}$ を零行列とすると，次が成立する．

1. $A + B = B + A$ (交換法則)
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (結合法則)
3. $A + \boldsymbol{O} = A$
4. $A - A = \boldsymbol{O}$

定理 2.2

A, B を同じ型の行列，c, d を実数とすると，次が成立する．

1. $c(dA) = (cd)A$
2. $c(A + B) = cA + cB$, $(c + d)A = cA + dA$
3. $A + (-1)B = A - B$, $1A = A$