はじめに (数学基礎 B1)

数学基礎 B = 線形代数

教科書「要点明解 線形数学 三訂版」培風館

(第1章 ベクトル)

- ▶ 第2章 行列
- ▶ 第3章 連立1次方程式

(第4章 行列式)

(第5章 行列の対角化)

講義の情報 http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス LINK

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと. (ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

連立1次方程式を解いてみる!

連立1次方程式を解いてみる!

まず、簡単な場合のみ …

連立1次方程式を解いてみる!

まず、簡単な場合のみ …

式の本数 m=2

変数の数 n=2 ··· x,y

連立1次方程式を解いてみる!

まず、簡単な場合のみ …

式の本数 m=2

変数の数 n=2 ··· x,y

例1

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 & \cdots (1) \\ 6x + 9y = 4 & \cdots (2) \end{cases}$$

連立1次方程式を解いてみる!

まず、簡単な場合のみ …

式の本数 m=2

変数の数 n=2 ··· x,y

例1

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 & \cdots & (1) \\ 6x + 9y = 4 & \cdots & (2) \end{cases}$$

$$(2) - 3 \times (1) : 0 = 1$$

連立1次方程式を解いてみる!

まず、簡単な場合のみ …

式の本数
$$m=2$$

変数の数 n=2 ··· x,y

例1

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 & \cdots & (1) \\ 6x + 9y = 4 & \cdots & (2) \end{cases}$$

$$(2) - 3 \times (1) : 0 = 1$$
 ?

連立1次方程式を解いてみる!

まず、簡単な場合のみ …

式の本数
$$m=2$$

変数の数 n=2 ··· x,y

例1

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 & \cdots (1) \\ 6x + 9y = 4 & \cdots (2) \end{cases}$$

$$(2) - 3 \times (1) : 0 = 1$$
 ? ?

連立1次方程式を解いてみる!

まず、簡単な場合のみ …

式の本数
$$m=2$$

変数の数
$$n=2$$
 ··· x,y

例1

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 & \cdots & (1) \\ 6x + 9y = 4 & \cdots & (2) \end{cases}$$

$$(2) - 3 \times (1) : 0 = 1$$
 ???

連立1次方程式を解いてみる!

まず、簡単な場合のみ …

式の本数
$$m=2$$

変数の数 n=2 ··· x,y

例1

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 & \cdots (1) \\ 6x + 9y = 4 & \cdots (2) \end{cases}$$

$$(2) - 3 \times (1) : 0 = 1$$
 ? ? ? ? ? ? ? ?

連立1次方程式を解いてみる!

まず、簡単な場合のみ …

式の本数
$$m=2$$

変数の数 n=2 ··· x,y

例1

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 & \cdots & (1) \\ 6x + 9y = 4 & \cdots & (2) \end{cases}$$

をみたすx,yは?

$$(2) - 3 \times (1) : 0 = 1$$
 ? ? ? ? ? ? ?

解なし

$$\begin{cases} x + 2y = 3 & \cdots (1) \\ 2x + 4y = 6 & \cdots (2) \end{cases}$$

をみたす *x*, *y* は?

$$\begin{cases} x + 2y = 3 & \cdots & (1) \\ 2x + 4y = 6 & \cdots & (2) \end{cases}$$

$$(2) - 2 \times (1) : 0 = 0$$

$$\begin{cases} x + 2y = 3 & \cdots (1) \\ 2x + 4y = 6 & \cdots (2) \end{cases}$$

$$(2) - 2 \times (1) : 0 = 0$$
 ?

$$\begin{cases} x + 2y = 3 & \cdots (1) \\ 2x + 4y = 6 & \cdots (2) \end{cases}$$

$$(2) - 2 \times (1) : 0 = 0$$
 ? ?

$$\begin{cases} x + 2y = 3 & \cdots & (1) \\ 2x + 4y = 6 & \cdots & (2) \end{cases}$$

$$(2) - 2 \times (1) : 0 = 0$$
 ???

$$\begin{cases} x + 2y = 3 & \cdots (1) \\ 2x + 4y = 6 & \cdots (2) \end{cases}$$

$$(2) - 2 \times (1) : 0 = 0$$
 ? ? ? ? ? ? ?

$$\begin{cases} x + 2y = 3 & \cdots (1) \\ 2x + 4y = 6 & \cdots (2) \end{cases}$$

$$(2) - 2 \times (1) : 0 = 0$$
 ? ? ? ? ? ? ?

$$0 = 0 \quad \cdots (3)$$

$$\begin{cases} x + 2y = 3 & \cdots (1) \\ 2x + 4y = 6 & \cdots (2) \end{cases}$$

をみたすx,yは?

$$(2) - 2 \times (1) : 0 = 0$$
 ? ? ? ? ? ? ?

$$0 = 0 \quad \cdots (3)$$

(1) かつ (2) の解 \iff (1) かつ (3) の解

$$\begin{cases} x + 2y = 3 & \cdots (1) \\ 2x + 4y = 6 & \cdots (2) \end{cases}$$

$$(2) - 2 \times (1) : 0 = 0$$
 ? ? ? ? ? ? ?

$$0 = 0 \quad \cdots (3)$$

$$(1)$$
 かつ (2) の解 \iff (1) かつ (3) の解 \iff (1) の解

$$\begin{cases} x + 2y = 3 & \cdots (1) \\ 2x + 4y = 6 & \cdots (2) \end{cases}$$

$$(2) - 2 \times (1) : 0 = 0$$
 ? ? ? ? ? ? ?

$$0 = 0 \quad \cdots (3)$$

$$(1)$$
 かつ (2) の解 \iff (1) かつ (3) の解 \iff (1) の解

解は
$$x + 2y = 3$$
をみたす全ての x, y

$$\begin{cases} x + 2y = 3 & \cdots (1) \\ 2x + 4y = 6 & \cdots (2) \end{cases}$$

をみたす x, y は?

$$(2) - 2 \times (1) : 0 = 0$$
 ? ? ? ? ? ? ?

$$0 = 0 \quad \cdots (3)$$

$$(1)$$
 かつ (2) の解 \iff (1) かつ (3) の解 \iff (1) の解

解は
$$x + 2y = 3$$
をみたす全ての x, y

注意

解は無数にあり、すべて直線 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ 上にのっている

$$\begin{cases} 2x + y = 3 & \cdots (1) \\ 3x + 2y = 2 & \cdots (2) \end{cases}$$

をみたす *x*, *y* は?

$$\begin{cases} 2x + y = 3 & \cdots (1) \\ 3x + 2y = 2 & \cdots (2) \end{cases}$$

$$2 \times (1) - (2) : x = 4 \cdots (3)$$

$$\begin{cases} 2x + y = 3 & \cdots (1) \\ 3x + 2y = 2 & \cdots (2) \end{cases}$$

$$2 \times (1) - (2) : x = 4 \quad \cdots (3)$$

$$((2) - 3 \times (3)) \times \frac{1}{2} : y = -5 \quad \cdots (4)$$

$$\begin{cases} 2x + y = 3 & \cdots (1) \\ 3x + 2y = 2 & \cdots (2) \end{cases}$$

$$2 \times (1) - (2) : x = 4 \cdots (3)$$

$$((2) - 3 \times (3)) \times \frac{1}{2} : y = -5 \quad \cdots (4)$$

$$(1)$$
 かつ (2) の解 \iff (2) かつ (3) の解

$$\begin{cases} 2x + y = 3 & \cdots (1) \\ 3x + 2y = 2 & \cdots (2) \end{cases}$$

$$2 \times (1) - (2) : x = 4 \cdots (3)$$

$$((2) - 3 \times (3)) \times \frac{1}{2} : y = -5 \quad \cdots (4)$$

$$(1)$$
 かつ (2) の解 \iff (2) かつ (3) の解 \iff (3) かつ (4) の解

$$\begin{cases} 2x + y = 3 & \cdots (1) \\ 3x + 2y = 2 & \cdots (2) \end{cases}$$

$$2 \times (1) - (2) : x = 4 \cdots (3)$$

$$((2) - 3 \times (3)) \times \frac{1}{2} : y = -5 \quad \cdots (4)$$

$$((2) - 3 \wedge (3)) \wedge {}_{2} \cdot g = -3$$
 い(4)
(1) かつ(2) の解 \iff (2) かつ(3) の解 \iff (3) かつ(4) の解

解は
$$(x,y) = (4,-5)$$
 のみ

$$\begin{cases} 2x + y = 3 & \cdots (1) \\ 3x + 2y = 2 & \cdots (2) \end{cases}$$

をみたすx,yは?

$$2 \times (1) - (2) : x = 4 \cdots (3)$$

$$((2) - 3 \times (3)) \times \frac{1}{2} : y = -5 \quad \cdots (4)$$

$$(1)$$
 かつ (2) の解 \iff (2) かつ (3) の解 \iff (3) かつ (4) の解

解は
$$(x,y) = (4,-5)$$
 のみ

$\frac{1}{1}$ $\frac{1}$

注意

上で行ったり来たり (\iff) できることが重要 片向き \Leftarrow , \Rightarrow だと**全ての解をもれなくぴったり求めた**とは言えない

式の数 m … 多い

変数の数 $n \cdots x, y, z, w \cdots$ 多い

式の数 m … 多い

変数の数 $n \cdots x, y, z, w \cdots$ 多い

 $x_1, x_2, \dots, x_{100}, \dots$ 多い

式の数 m … 多い

変数の数 $n \cdots x, y, z, w \cdots$ 多い

 $x_1, x_2, \dots, x_{100}, \dots$ 多い ... 大変なので「行列」を用いる

式の数 m … 多い

変数の数 $n \cdots x, y, z, w \cdots$ 多い

 $x_1, x_2, \ldots, x_{100}, \ldots$ 多い

··· 大変なので「<mark>行列</mark>」を用いる

上の例3

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \end{cases}$$

式の数 m … 多い

変数の数 $n \cdots x, y, z, w \cdots$ 多い

 $x_1, x_2, \ldots, x_{100}, \ldots$ 多い

··· 大変なので「<mark>行列</mark>」を用いる

上の例3

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

定義 $(m \times n 行列 A)$

第1行
第2行
$$\begin{array}{c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ \end{array}$$

第1列 第2列 \cdots 第 n 列
 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ \end{pmatrix}$

i行j列にある a_{ij} を行列Aの $\underline{(i,j)$ 成分</u>という. $A = (a_{ij})$ とかく.

星 明考 (新潟大学理学部数学プログラム)

定義(行ベクトル,列ベクトル)

 $1 \times n$ 行列 (a_1, \dots, a_n) を長さ n の 行べクトル,

 $m \times 1$ 行列 $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ を長さ m の <u>列ベクトル</u> という.

定義 (行ベクトル,列ベクトル)

 $1 \times n$ 行列 (a_1, \dots, a_n) を長さ n の <u>行べクトル</u>,

$$m \times 1$$
 行列 $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ を長さ m の 列ベクトル という.

注意

行列 $A = (a_{ij})$ は、行ベクトル、列ベクトルを用いて

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} a_1 &= (a_{11}, \cdots, a_{1n}) \\ \vdots \\ a_m &= (a_{m1}, \cdots, a_{mn}) \end{aligned}$$

$$A = (\mathbb{b}_1, \dots, \mathbb{b}_n)$$
 $\mathbb{b}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \mathbb{b}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$

ともかける.

定義 (行ベクトル,列ベクトル)

 $1 \times n$ 行列 (a_1, \dots, a_n) を長さ n の <u>行べクトル</u>,

$$m \times 1$$
 行列 $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ を長さ m の 列ベクトル という.

注意

行列 $A = (a_{ij})$ は、行ベクトル、列ベクトルを用いて

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} a_1 &= (a_{11}, \cdots, a_{1n}) \\ \vdots \\ a_m &= (a_{m1}, \cdots, a_{mn}) \end{aligned}$$

$$A = (\mathbb{b}_1, \dots, \mathbb{b}_n)$$
 $\mathbb{b}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \mathbb{b}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$

ともかける. 教科書の太字 \mathbf{a}_1 は 手書きでは二重線 \mathbf{a}_1 でかく.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.
$$2 \times 2$$
 行列
$$2 \times 2$$
 行列
$$2 \times 3$$
 行列

$$A = \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right), \quad C = \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right).$$

 2×2 行列 2×2 行列

2×3行列

 $m \times n$ 行列どうしは 同じ型 という

$$A=\left(\begin{array}{cc}1&2\\3&4\end{array}\right),\quad B=\left(\begin{array}{cc}0&1\\1&0\end{array}\right),\quad C=\left(\begin{array}{cc}1&2&3\\4&5&6\end{array}\right).$$

 2×2 行列 2×2 行列

2×3 行列

 $m \times n$ 行列どうしは 同じ型 という

定義 (A = B)

 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ を同じ型の行列とする.

$$A=\left(\begin{array}{cc}1&2\\3&4\end{array}\right),\quad B=\left(\begin{array}{cc}0&1\\1&0\end{array}\right),\quad C=\left(\begin{array}{cc}1&2&3\\4&5&6\end{array}\right).$$

 2×2 行列 2×2 行列

2×3 行列

 $m \times n$ 行列どうしは 同じ型 という

定義 (A = B)

 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ を同じ型の行列とする.

 $A \ge B$ は等しい $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ すべての i, j に対して, $a_{ij} = b_{ij}$.

$$A=\left(\begin{array}{cc}1&2\\3&4\end{array}\right),\quad B=\left(\begin{array}{cc}0&1\\1&0\end{array}\right),\quad C=\left(\begin{array}{cc}1&2&3\\4&5&6\end{array}\right).$$

 2×2 行列 2×2 行列

2×3行列

 $m \times n$ 行列どうしは 同じ型 という

定義 (A = B)

 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ を同じ型の行列とする.

 $A \ge B$ は等しい $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ すべての i, j に対して, $a_{ij} = b_{ij}$.

 $A \ge B$ は等しいとき, A = B とかく.

$$A=\left(\begin{array}{cc}1&2\\3&4\end{array}\right),\quad B=\left(\begin{array}{cc}0&1\\1&0\end{array}\right),\quad C=\left(\begin{array}{cc}1&2&3\\4&5&6\end{array}\right).$$

 2×2 行列 2×2 行列

2 × 3 行列

 $m \times n$ 行列どうしは 同じ型 という

定義 (A = B)

 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ を同じ型の行列とする.

 $A \ge B$ は等しい $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ すべての i, j に対して, $a_{ij} = b_{ij}$.

 $A \ge B$ は等しいとき, A = B とかく.

▶ def … definition(定義)

 $A = (a_{ij})$ を行列とする.

 $A = (a_{ij})$ を行列とする.

A は 零行列 $\stackrel{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ すべての i,j に対して, $a_{ij}=0$.

 $A = (a_{ij})$ を行列とする.

A は零行列 $\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ すべての i,j に対して, $a_{ij}=0$.

A が零行列のとき, $A = \mathbf{0}$ とかく:

$$\boldsymbol{O} = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right)$$

 $A = (a_{ij})$ を行列とする.

A は 零行列 $\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ すべての i,j に対して, $a_{ij}=0$.

A が零行列のとき, $A = \mathbf{O}$ とかく:

$$O = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

定義(正方行列)

 $n \times n$ 行列を n 次正方行列 という.

 $A = (a_{ij})$ を行列とする.

A は零行列 $\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ すべての i,j に対して, $a_{ij}=0$.

A が零行列のとき, $A = \mathbf{O}$ とかく:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

定義(正方行列)

 $n \times n$ 行列を n 次正方行列 という.

▶ 正方行列は実際にかくと正方形

 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ を同じ型の行列, c を実数とする.

$$A=(a_{ij})$$
, $B=(b_{ij})$ を同じ型の行列, c を実数とする.

$$A+B:=(a_{ij}+b_{ij})$$
 A と B の和

$$A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$$
を同じ型の行列, c を実数とする.

$$A+B:=(a_{ij}+b_{ij})$$
 A と B の和

$$A - B := (a_{ij} - b_{ij})$$
 A と B の差

定義 (行列 A と B の和, 差, 定数倍)

$$A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$$
を同じ型の行列, c を実数とする.

$$A+B:=(a_{ij}+b_{ij})$$
 AとBの和

$$A - B := (a_{ij} - b_{ij})$$
 A と B の差

$$cA := (ca_{ij})$$
 Aの c 倍

$$A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$$
を同じ型の行列, c を実数とする.

$$A+B:=(a_{ij}+b_{ij})$$
 AとBの和

$$A - B := (a_{ij} - b_{ij})$$
 AとBの差

$$cA := (ca_{ij})$$
 Aの c 倍

ightharpoons X := Y は X を Y で定義する という記号

A, B, C を同じ型の行列, O を零行列とすると, 次が成立する.

A, B, C を同じ型の行列, O を零行列とすると,次が成立する.

1. A+B=B+A (交換法則)

A, B, C を同じ型の行列, O を零行列とすると,次が成立する.

- 1. A + B = B + A (交換法則)
- 2. (A+B)+C=A+(B+C) (結合法則)

A, B, C を同じ型の行列, O を零行列とすると、次が成立する.

- 1. A + B = B + A (交換法則)
- 2. (A+B)+C=A+(B+C) (結合法則)
- 3. A + O = A

A, B, C を同じ型の行列, O を零行列とすると,次が成立する.

- 1. A+B=B+A (交換法則)
- 2. (A+B)+C=A+(B+C) (結合法則)
- 3. A + O = A
- **4**. A A = O

A, B, C を同じ型の行列, O を零行列とすると、次が成立する.

- 1. A + B = B + A (交換法則)
- 2. (A+B)+C=A+(B+C) (結合法則)
- 3. A + O = A
- **4**. A A = 0

定理 2.2

A, B を同じ型の行列, c, d を実数とすると, 次が成立する.

A, B, C を同じ型の行列,O を零行列とすると,次が成立する.

- 1. A + B = B + A (交換法則)
- 2. (A+B)+C=A+(B+C) (結合法則)
- 3. A + O = A
- **4**. A A = 0

定理 2.2

A, B を同じ型の行列, c, d を実数とすると, 次が成立する.

1. c(dA) = (cd)A

A, B, C を同じ型の行列,O を零行列とすると,次が成立する.

- 1. A + B = B + A (交換法則)
- 2. (A+B)+C=A+(B+C) (結合法則)
- 3. A + O = A
- **4**. A A = 0

定理 2.2

A, B を同じ型の行列, c,d を実数とすると, 次が成立する.

- 1. c(dA) = (cd)A
- 2. c(A + B) = cA + cB, (c + d)A = cA + dA

A, B, C を同じ型の行列, O を零行列とすると, 次が成立する.

- 1. A + B = B + A (交換法則)
- 2. (A+B)+C=A+(B+C) (結合法則)
- 3. A + Q = A
- **4**. A A = 0

定理 2.2

A, B を同じ型の行列, c, d を実数とすると, 次が成立する.

- 1. c(dA) = (cd)A
- 2. c(A + B) = cA + cB, (c + d)A = cA + dA
- 3. A + (-1)B = A B, 1A = A