はじめに　(数学基礎 B1)

$\boxed{\text{数学基礎 B} \quad = \quad \text{線形代数}}$

教科書「要点明解　線形数学　三訂版」培風館

(第１章　ベクトル)
- 第２章　行列
- 第３章　連立１次方程式

(第４章　行列式)
(第５章　行列の対角化)

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと.
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 $\longrightarrow$ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

定義 (正則行列，逆行列)

A : n 次正方行列，E_n : n 次単位行列.

$$AB = BA = E_n \cdots (1)$$

なる n 次正方行列 B が存在するとき，A を n 次 正則行列 という．このとき，(1) をみたす行列 B を A の逆行列 といい，$B = A^{-1}$ とあらわす.

注意

A が正則行列のとき，逆行列 A^{-1} はただ 1 つ存在する.

$\because AB = BA = E_n \cdots (1)$

$\quad AB' = B'A = E_n \cdots (2)$

$\Rightarrow B = BE_n \underset{(2)}{=} B(AB') \underset{\text{結合法則}}{=} (BA)B' \underset{(1)}{=} E_nB' = B'$ より $B = B'$ $\square$

例

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad - bc \neq 0$ のとき,

A は正則行列で逆行列 $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

($\because$ 実際，各自確かめてみる)

例

$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, $ad - bc = -10 + 21 = 11 \neq 0$ より,

A は正則行列で $A^{-1} = \dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

注意

後に，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: 正則行列 $\Longleftrightarrow$ $ad - bc \neq 0$ を示す．(($\Leftarrow$) は OK)

また，<u>$n \times n$ 行列 ($n \geq 3$) がいつ正則行列となるかは，今後学んでいく</u>.

例 (逆行列 A^{-1} の応用)

連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

は $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ を用いて，$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ とかける．この両辺に逆行列 $A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ をかけると，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

他の解 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ がないことは，逆行列 A^{-1} の**一意性 (1 つしかないこと)** からわかる．

定理 2.4

(1) $A : n$ 次正則行列 $\Rightarrow A^{-1} : n$ 次正則行列であり,

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

(2) $A, B : n$ 次正則行列 $\Rightarrow AB,\ BA$ は n 次正則行列であり,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \qquad (BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}.$$ (順番に注意)

注意

実際, $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AE_nA^{-1} = AA^{-1} = E_n$.
$(B^{-1}A^{-1})(AB) = E_n$ も同様. $\therefore\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

定義 (A^n)

A：正方行列.
$A^2 := AA,\ A^3 := AAA, \ldots, A^n := A \cdots A$ (n 個). $\underline{A \text{ の } n \text{ 乗}}$ という.
$A^0 := E$ (単位行列), $A^1 := A$ とする.

定義 (A^{T})　[転置 ⋯ transposed]

$A = (a_{ij})$：$m \times n$ 行列.
$A^{\mathrm{T}} := (a_{ji})$：$n \times m$ 行列を $\underline{A \text{ の転置行列}}$ という. **(行 ↔ 列)**

例

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = (1\ 3\ 5),\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

例 (内積，直交する)

$$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \mathbb{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbb{x}^{\mathrm{T}}\mathbb{y} = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$: $\mathbb{x}$ と $\mathbb{y}$ の内積.

$\mathbb{x}$ と $\mathbb{y}$ が直交する $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathbb{x}^{\mathrm{T}}\mathbb{y} = 0$.

例

$$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbb{y} = \begin{pmatrix} a \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbb{x}^{\mathrm{T}}\mathbb{y} = (a\ \ a\ \ 1)\begin{pmatrix} a \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = a^2 - 3a + 2 = (a-1)(a-2)$$ であり，

$\mathbb{x}$ と $\mathbb{y}$ が直交する $\iff$ $a = 1$ または $a = 2$.

例

$(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$.
$\because\ A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}} = (a_{ji}) + (b_{ji}) = (a_{ji} + b_{ji}) = (a_{ij} + b_{ij})^{\mathrm{T}} = (A+B)^{\mathrm{T}}$.

例

$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$. （<u>順番</u>に注意）
$\because\ A = (a_{ij}),\ B = (b_{jk})$ とすると，$AB = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)$ より，
AB の (i,k) 成分 $= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = (AB)^{\mathrm{T}}$ の (k,i) 成分
$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} b_{jk}a_{ij} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ の (k,i) 成分.

例

A：正則行列 $\Rightarrow A^{\mathrm{T}}$：正則行列.
$\because$ 実際，$(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$ となる：
$A^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^{-1} = A^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}} \underset{\text{上の例}}{=} (A^{-1}A)^{\mathrm{T}} = E_n^{\mathrm{T}} = E_n$.
$(A^{\mathrm{T}})^{-1}A^{\mathrm{T}} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} \underset{\text{上の例}}{=} (AA^{-1})^{\mathrm{T}} = E_n^{\mathrm{T}} = E_n$.

定義 (対称行列，交代行列)

A：正方行列.

A：対称行列 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $A^{\mathrm{T}} = A$.

A：交代行列 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $A^{\mathrm{T}} = -A$.

例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = A^{\mathrm{T}}$$ より，A は対称行列.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix} = -B^{\mathrm{T}}$$ より，B は交代行列.