はじめに　(数学基礎B1)

$\boxed{\text{数学基礎 B} \quad = \quad \text{線形代数}}$

教科書「要点明解　線形数学　三訂版」培風館

(第１章　ベクトル)
- 第２章　行列
- 第３章　連立１次方程式

(第４章　行列式)
(第５章　行列の対角化)

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと.
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 $\longrightarrow$ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

例 (基本変形)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) A の 1 行目と 2 行目を入れ替える： $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

(2) A の 1 行目を 3 倍する： $\begin{pmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

(3) A の 2 行目の 2 倍を 1 行目に加える：

$$\begin{pmatrix} a_{11} + 2a_{21} & a_{12} + 2a_{22} & a_{13} + 2a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

例 (基本変形)

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) A の 1 行目と 2 行目を入れ替える： $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \underset{!!}{=} BA.$

(2) A の 1 行目を 3 倍する： $\begin{pmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \underset{!!}{=} CA.$

(3) A の 2 行目の 2 倍を 1 行目に加える：

$$\begin{pmatrix} a_{11} + 2a_{21} & a_{12} + 2a_{22} & a_{13} + 2a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \underset{!!}{=} DA.$$

例 (基本変形)

このような 3 つの操作
(1) A の i 行目と j 行目を入れ替える
(2) A の i 行目を k 倍する
(3) A の i 行目の k 倍を j 行目に加える
を (行) 基本変形 という.

基本変形に対応して左からかけた (B, C, D のような) 行列を

基本行列 という.

定理 2.5 (ハミルトン・ケーリーの定理)

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し，$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E_2 = \boldsymbol{O}$.

$$
\begin{aligned}
&\because A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E_2 \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+da & ab+db \\ ac+dc & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{O}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ に対して，A^{10} を求めよ．

ハミルトン・ケーリーの定理より，$A^2 - 5A + 6E_2 = \boldsymbol{O}$.

$$\begin{cases} A^{10} \longrightarrow x^{10} =: f(x) \\ A^2 - 5A + 6E_2 \longrightarrow x^2 - 5x + 6 =: b(x) \end{cases}$$

とし，$f(x) = q(x)b(x) + r(x) = q(x)(x^2 - 5x + 6) + sx + t \cdots (1)$
の余り $r(x) = sx + t$ をもとめると，$b(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$
より，(1) に $x = 2, 3$ を代入して，

$$\begin{cases} 2^{10} = 2s + t, \\ 3^{10} = 3s + t. \end{cases}$$

これを解いて，$s = 3^{10} - 2^{10} = 59049 - 1024 = 58025$,
$t = 2^{10} - 2s = 2^{10} - 2 \times 58025 = -115026$. ここで，$x$ に A を代入すれば，$A^2 - 5A + 6E_2 = \boldsymbol{O}$ より，$A^{10} = \boldsymbol{O} + sA + tE_2$

$$= 58025 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - 115026 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -57001 & 116050 \\ -58025 & 117074 \end{pmatrix}.$$

定義 (2 次形式)

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$ax^2 + 2bxy + cy^2 = (x \ \ y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbb{x}^{\mathrm{T}} A \, \mathbb{x}$ を

x, y に関する 2 次形式 という.

例

$3x^2-2xy+3y^2=3$ で表される図形を求める.

$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbb{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して,

2 次形式 $3x^2-2xy+3y^2=(x\ \ y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\mathbb{x}^{\mathrm{T}}A\,\mathbb{x}$.

ここで,

$$P=\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

とすると, P は正則行列. (P は回転行列とよばれる)

実際, $P^{-1}=P^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ が確認できる. このとき,

$P^{-1}AP=P^{\mathrm{T}}AP=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=:B$ (対角行列) となる.

例

ここで，(x, y) 座標 $\longrightarrow$ (x', y') 座標を

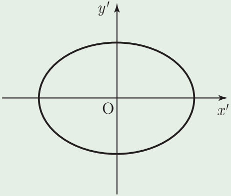
$$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P\mathbb{x}' \quad \text{すなわち，} \mathbb{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で定義する．(x, y) 座標は (x', y') 座標を 反時計回りに $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$ 回転 したものとなる．このとき，

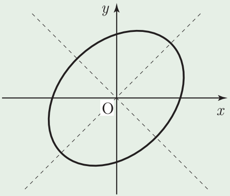
$$3x^2 - 2xy + 3y^2 = \mathbb{x}^{\mathrm{T}} A\, \mathbb{x} = (P\mathbb{x}')^{\mathrm{T}} A (P\mathbb{x}') = \mathbb{x}'^{\mathrm{T}} P^{\mathrm{T}} A P \mathbb{x}'$$

$= \mathbb{x}'^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \mathbb{x}' = 2x'^2 + 4y'^2$. すなわち，新しい座標系 (x', y') では

$2x'^2 + 4y'^2 = 3 \iff \frac{2}{3}x'^2 + \frac{4}{3}y'^2 = 1$ (楕円) となる：



$2x'^2 + 4y'^2 = 3$



$3x^2 - 2xy + 3y^2 = 3$