

はじめに (線形代数 IIA)

線形代数 II = 線形代数 I のつづき

教科書 「やさしい線形代数, H. アントン著, 山下純一訳」 現代数学社

講義の情報 <http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス [LINK](#)

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと.
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

第4章 線形空間

“線形” = “線型” = “linear” = “1 次”

$x = x^1$ ($x^2, x^3, \dots$ は出てこない), $y = y^1, z = z^1, \dots$

● n 次元？

0 次元 $\cdots$ 点 1 次元 $\cdots$ 直線 2 次元 $\cdots$ 平面 3 次元 $\cdots$ 空間

n 次元？

定義 ($\mathbb{R}^n$)

$\mathbb{R}^n := \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \text{ は実数}\}$ n 次元ユークリッド空間

▶ $X := Y$ は X を Y で定義する という記号

注意

$\mathbb{R}^n$ は数ベクトル空間ともよばれる.

(a_1, a_2, a_3) で点もベクトルもあらわす.

定義 (同値)

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n), \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n.$$

$$\mathbf{u} \text{ と } \mathbf{v} \text{ が } \underline{\text{同値}} \stackrel{\text{def}}{\iff} u_1 = v_1, \dots, u_n = v_n.$$

▶ def ... definition(定義)

定義 (スカラー倍, 和, ゼロ・ベクトル, 和に関する逆元, 差)

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n), \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}.$$

$$k\mathbf{u} := (ku_1, \dots, ku_n) \quad \underline{\text{スカラー倍}}$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} := (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) \quad \underline{\text{和}}$$

$$\mathbf{0} := (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \quad \underline{\text{ゼロ・ベクトル}}$$

$$-\mathbf{u} := (-u_1, \dots, -u_n) \quad \underline{\text{和に関する逆元}}$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} := \mathbf{u} + (-\mathbf{v}) = (u_1 - v_1, \dots, u_n - v_n) \quad \underline{\text{差}}$$

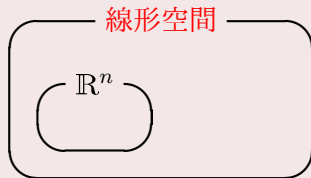
定理 1 ($\mathbb{R}^n$ の基本性質)

$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n, k, l \in \mathbb{R}$.

- (a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (交換法則)
- (b) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ (結合法則)
- (c) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$ (ゼロ元 $\mathbf{0}$ の存在)
- (d) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ (逆元 $-\mathbf{u}$ の存在)
- (e) $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$
- (f) $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$ (分配法則 1)
- (g) $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$ (分配法則 2)
- (h) $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$ (単位元 1 の存在)

注意

$\mathbb{R}^n$ を一般化したものが線形空間
線形空間で成立する定理は $\mathbb{R}^n$ でも成立



定義 ((ユークリッド) 内積)

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n), \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n.$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := u_1 v_1 + \dots + u_n v_n \quad \mathbf{u} \text{ と } \mathbf{v} \text{ の (ユークリッド) 内積}$$

注意

$n = 2, 3$ のときは, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \theta$ であった. (教 p.123)

▶ 教 p.152 の例 1 を各自みておく

定理 2(内積の性質)

$$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}.$$

$$(a) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

$$(b) (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$$

$$(c) (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$$

$$(d) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0 \quad \text{等号成立} \iff \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ (ゼロ・ベクトル)}$$

▶ 教 p.153 の例 2 を各自みておく

定義 ((ユークリッド) ノルム, (ユークリッド) 距離)

$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n), \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$.

$\|\mathbf{u}\| := \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}$ $\mathbf{u}$ の (ユークリッド) ノルム

$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$

$\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ の (ユークリッド) 距離

注意

ベクトル $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ を $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ とすれば, 連立方程式

$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ は $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ とかけて便利.