

はじめに (線形代数 IIA)

線形代数 II = 線形代数 I のつづき

教科書 「やさしい線形代数, H. アントン著, 山下純一訳」 現代数学社

講義の情報 <http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス [LINK](#)

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと.
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

4.10 座標；基底変換

定理 24

V : 線形空間, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n : V$ の基底.

$\forall \mathbf{v} \in V$ は $\mathbf{v} = c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \mathbf{v}_n$ の形に一意的にあらわされる.

(証明) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ は V の基底より, $V = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \ni \mathbf{v}$.

一意性は, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ が 1 次独立より,

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \mathbf{v}_n = c'_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c'_n \mathbf{v}_n$$

$$\Rightarrow (c_1 - c'_1) \mathbf{v}_1 + \dots + (c_n - c'_n) \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = c'_1, \dots, c_n = c'_n. \quad \square$$

定義 (座標ベクトル, 座標行列)

定理 24 の $c_1, \dots, c_n$ を 基底 $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ に関する $\mathbf{v}$ の座標 ;

$(\mathbf{v})_S := (c_1, \dots, c_n)$ を 基底 S に関する $\mathbf{v}$ の座標ベクトル ;

$[\mathbf{v}]_S := \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ を 基底 S に関する $\mathbf{v}$ の座標行列 という.

例

$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1), \mathbf{v}_2 = (2, 9, 0), \mathbf{v}_3 = (3, 3, 4) \in \mathbb{R}^3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底.

$$(\because \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0)$$

$\mathbf{v} = (5, -1, 9)$ の $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ に関する座標ベクトル, 座標行列は

$$(\mathbf{v})_S = (1, -1, 2), [\mathbf{v}]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}. (\because \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3)$$

定理 25

V : 内積空間, $\dim V = n, S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} : V$ の正規直交基底,

$$(\mathbf{u})_S = (u_1, \dots, u_n), (\mathbf{u}')_S = (u'_1, \dots, u'_n).$$

$$(a) \|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2};$$

$$(b) d(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = \sqrt{(u_1 - u'_1)^2 + \dots + (u_n - u'_n)^2};$$

$$(c) \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}' \rangle = u_1 u'_1 + \dots + u_n u'_n.$$

(証明) 略.

基底変換問題

V : 線形空間, $B, B' : V$ の基底, $\mathbf{v} \in V$.

座標行列 $[\mathbf{v}]_B$ と $[\mathbf{v}]_{B'}$ の関係は？

- $\dim V = 2$ の場合を考える.

$$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}, B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\} \text{ とし, } [\mathbf{u}_1]_{B'} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, [\mathbf{u}_2]_{B'} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

$$\text{つまり, } \begin{cases} \mathbf{u}_1 = a \mathbf{u}'_1 + b \mathbf{u}'_2 \\ \mathbf{u}_2 = c \mathbf{u}'_1 + d \mathbf{u}'_2 \end{cases} \text{ とする. } \forall \mathbf{v} \in V \text{ に対して, } [\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}.$$

つまり, $\mathbf{v} = k_1 \mathbf{u}_1 + k_2 \mathbf{u}_2$ とすると, $\mathbf{v} =$

$$k_1(a \mathbf{u}'_1 + b \mathbf{u}'_2) + k_2(c \mathbf{u}'_1 + d \mathbf{u}'_2) = (k_1 a + k_2 c) \mathbf{u}'_1 + (k_1 b + k_2 d) \mathbf{u}'_2 \text{ より,}$$

$$[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{pmatrix} k_1 a + k_2 c \\ k_1 b + k_2 d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} [\mathbf{v}]_B.$$

$$\therefore [\mathbf{v}]_{B'} = P [\mathbf{v}]_B. \text{ 但し, } P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\mathbf{u}_1]_{B'} & [\mathbf{u}_2]_{B'} \end{pmatrix}.$$

- ▶ $\dim V = n$ の場合も, 同様に以下が成り立つ :

定理 (基底変換問題の解)

線形空間 V の基底 $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ から $B' = \{\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_n\}$ に変換するとき, $\mathbf{v} \in V$ に対して, $[\mathbf{v}]_{B'} = P [\mathbf{v}]_B$.

但し, $P = \left([\mathbf{u}_1]_{B'} \cdots [\mathbf{u}_n]_{B'} \right)$. (P を B から B' への変換行列 という)

例

$$V = \mathbb{R}^2, \text{ 基底 } B = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$B' = \left\{ \mathbf{u}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. [\mathbf{v}]_B = \mathbf{v}.$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = -\mathbf{u}'_1 + \mathbf{u}'_2 \\ \mathbf{u}_2 = 2\mathbf{u}'_1 - \mathbf{u}'_2 \end{cases} \quad \text{より, } [\mathbf{u}_1]_{B'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, [\mathbf{u}_2]_{B'} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ とすると, } [\mathbf{v}]_{B'} = P [\mathbf{v}]_B =$$

$$P \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}. \text{ 実際, } \mathbf{v} = -3\mathbf{u}'_1 + 5\mathbf{u}'_2.$$

定理 26

基底 B から B' への変換行列を P とする.

- (1) P は可逆 (正則);
- (2) P^{-1} は B' から B への変換行列.

(証明) $[\mathbf{v}]_{B'} = P[\mathbf{v}]_B, [\mathbf{v}]_B = Q[\mathbf{v}]_{B'} \Rightarrow [\mathbf{v}]_B = QP[\mathbf{v}]_B$. $\mathbf{v} \in V$ は任意より, $[\mathbf{v}]_B = \mathbf{e}_i$ (標準単位ベクトル) とすれば, $QP = I$ で $Q = P^{-1}$. $\square$

$$\blacktriangleright [\mathbf{v}]_{B'} = P[\mathbf{v}]_B \Rightarrow [\mathbf{v}]_B = P^{-1}[\mathbf{v}]_{B'}$$

定義 (直交行列)

$A^{-1} = A^t$ なる正方行列 A を 直交行列 という.

定理 27

V : 内積空間, $\dim V < \infty$. $B, B' : V$ の正規直交基底.

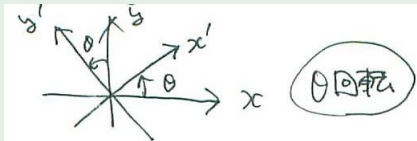
$$[\mathbf{v}]_{B'} = P[\mathbf{v}]_B \Rightarrow P \text{ は直交行列, i.e. } P^{-1} = P^t.$$

(証明) 略. (興味があれば, 各自考えたり, 調べたりしてみる)

例

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

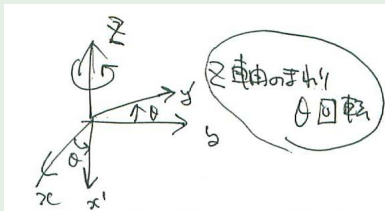
$$P = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$



例

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



定理 28

$A : n \times n$ 行列. 次は同値 :

- (a) A は直交行列 (i.e. $A^{-1} = A^t$);
- (b) A の行ベクトル全体は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 ;
- (c) A の列ベクトル全体は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 ;
- (d) $\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ ($\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$);
- (e) $\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ ($\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$).

(証明) 略. (興味があれば, 各自考えたり, 調べたりしてみる)

($\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^t \mathbf{y}$: ユークリッド内積に注意)

(a) $\Leftrightarrow$ (c) $A = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n)$ (A の j 列を $\mathbf{a}_j$) とすると, $(A^t)A$ の (i, j) 成分は $\sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} = \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle$ で, $\mathbf{a}_j$ 達が正規直交基底 $\Leftrightarrow (A^t)A = I_n$.

(a) $\Leftrightarrow$ (b) 同様に, 行について $A(A^t)$ を考えればよい. (a) $\Leftrightarrow$ (e)
 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^t \mathbf{y}$ より, $\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^t \mathbf{y} \rangle$ から従う. (d) 各自考えてみる.

▶ 教 pp.243~247 練習問題 4.10 を各自みておく