

はじめに (線形代数 IIA)

線形代数 II = 線形代数 I のつづき

教科書 「やさしい線形代数, H. アントン著, 山下純一訳」 現代数学社

講義の情報 <http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス [LINK](#)

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと.
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

5.4 行列の相似性

定理 5

V : 線形空間, $\dim(V) < \infty$. $T : V \rightarrow V : V$ 上の 1 次変換,
 $A : V$ の基底 B に関する T の行列, $A' : V$ の基底 B' に関する T の行列
 $\Rightarrow A' = P^{-1}AP$. 但し, $[\mathbf{x}]_B = P[\mathbf{x}]_{B'}$. (P は B' から B への変換行列)

(証明) $A\mathbf{u} = \mathbf{v}$ を $\mathbf{u} \xrightarrow{A} \mathbf{v}$ とかくと, (可換図式とよばれる) 次をえる :

$$\begin{array}{ccc}
 [\mathbf{x}]_B & \xrightarrow{A} & [T(\mathbf{x})]_B \\
 \uparrow P & & \downarrow P^{-1} \\
 [\mathbf{x}]_{B'} & \xrightarrow[P^{-1}AP]{A'} & [T(\mathbf{x})]_{B'}.
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \therefore A'[\mathbf{x}]_{B'} = P^{-1}AP[\mathbf{x}]_B. \\
 \mathbf{x} \in V \text{ は任意であるから, } B' = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \text{ に対して, } \mathbf{x} = \mathbf{v}_i \text{ とすれば, } [\mathbf{v}_i]_{B'} = \mathbf{e}_i \text{ (標準単位ベクトル).} \\
 \therefore A' = P^{-1}AP. \quad \square
 \end{array}$$

定義 (対角行列)

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} \text{ を } \underline{\text{対角行列}} \text{ という. } (\text{対角} \cdots \text{diagonal})$$

定義 (相似)

A, A' : 正方行列.

A' は A に 相似 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists P \text{ s.t. } A' = P^{-1}AP$. (相似 $\cdots$ similar)

A は A' に相似のとき, $A \sim A'$ とかく.

注意

相似 ($\sim$) は **同値関係**, i.e. $A \sim A$ (反射律), $A \sim A' \Rightarrow A' \sim A$ (対称律), $A \sim A', A' \sim A'' \Rightarrow A \sim A''$ (推移律) をみたす. ($\therefore$ 各自考える)
 $\rightarrow n \times n$ 行列全体はいくつかの **同値類に類別 (クラス分け)** される.

例

$$V = \mathbb{R}^2, T = T_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}, \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$B' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}, \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$P = ([\mathbf{u}_1]_B \ [\mathbf{u}_2]_B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ であるから,}$$

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\therefore A \sim A'$ (相似). (A は基底変換によって対角行列 A' とできる)

注意

定理 5 より 「 $T : V \rightarrow V$ を表す行列は (基底変換によって) 相似」

第6章 固有値, 固有ベクトル

定義 (固有値, 固有ベクトル)

$A: n \times n$ 行列.

$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ をみたす $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) を A の (λ に対する) 固有ベクトル, $\lambda \in \mathbb{R}$ を A の 固有値 という.

(固有ベクトル $\cdots$ eigenvector, 固有値 $\cdots$ eigenvalue)

例

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ より,}$$

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は A の固有値 3 に対する固有ベクトル.

問

A の固有値は(いくつ)存在するか?

$\lambda \in \mathbb{R}$ が A の固有値

$$\Leftrightarrow \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n (\mathbf{x} \neq \mathbf{0}) \text{ s.t. } A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

$$\Leftrightarrow \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n (\mathbf{x} \neq \mathbf{0}) \text{ s.t. } (\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R} \text{ は固有方程式 } \det(\lambda I - A) = 0 \text{ をみたす.}$$

例

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値を(すべて)求めよ.

A の固有値は $\lambda = 1, 2$ (のみ). $\because A$ の固有方程式 $\det(\lambda I - A)$

$$= \det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0.$$

例

$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を (すべて) 求めよ.

A の固有値はなし. $\because A$ の固有方程式 $\det(\lambda I - A)$
 $= \det \begin{pmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 > 0$ より解なし.

例

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値を (すべて) 求めよ.

A の固有値は $\lambda = 4, 2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}$. $\because A$ の固有方程式 $\det(\lambda I - A)$
 $= \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ -3 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 4 \end{pmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda + 17\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$.

注意

$A : n \times n$ 行列 $\Rightarrow A$ の固有値は n 個以下.

▶ まとめると ...

定理 1

$A : n \times n$ 行列. 次は同値 :

- (a) λ は A の固有値 ;
- (b) $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は自明でない解 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ をもつ ;
- (c) $\exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n (\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$ s.t. $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$;
- (d) λ は固有方程式 $\det(\lambda I - A) = 0$ の実数解.

定義 (固有空間)

$W_\lambda = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^n$: 解空間を A の固有値 λ に対する固有空間 という.

▶ $W_\lambda = \{A \text{ の } \lambda \text{ に対する固有ベクトル} \} \cup \{\mathbf{0}\}$

注意

固有値, 固有ベクトル, 固有空間は一般の $V \neq \mathbb{R}^n$ に対して定義できる.
(教 pp. 292~293)

例

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の (各固有値に対する) 固有空間を求めよ.

A の固有方程式

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 5)^2 = 0 \text{ より,}$$

A の固有値は $\lambda = 1, 5$ (2重根).

$$W_\lambda = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ より,}$$

$$W_1 = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\stackrel{\text{各自}}{=} \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ (t \in \mathbb{R}) \right\}.$$

$$W_5 = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\stackrel{\text{各自}}{=} \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ (s, t \in \mathbb{R}) \right\}.$$

$\therefore \dim(W_1) = 1, \dim(W_5) = 2$. (1次独立な固有ベクトルが2つある!)