

はじめに (線形代数 IIA)

線形代数 II = 線形代数 I のつづき

教科書 「やさしい線形代数, H. アントン著, 山下純一訳」 現代数学社

講義の情報 <http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス [LINK](#)

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと.
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

6.2 (6.3) 対角化法 (直交対角化法)

問

V : 線形空間 (内積空間), $\dim(V) < \infty$.

$T : V \rightarrow V$: 1 次変換に対して, T の行列が対角行列となる
 V の基底 B (正規直交基底 B) は存在するか?

問'

A : 正方行列. $\exists P$: 可逆 (正則) 行列 (直交行列) s.t. $P^{-1}AP$: 対角行列.
このとき, A を 対角化可能 (直交対角化可能) という.

▶ 5.4 の定理 5 (と 4.10 の定理 28) より, 問 $\Leftrightarrow$ 問' (同値)

定理 2 (定理 5)

$A : n \times n$ 行列. 次は同値 :

- (a) A は対角化可能 (直交対角化可能) ;
- (b) A は n 個の 1 次独立な (正規直交する) 固有ベクトルをもつ.

(証明) (a) $\Leftrightarrow \exists P = (\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n)$ は可逆行列 (直交行列) s.t.

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} : \text{対角行列}$$

$\Leftrightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n$ は A の固有値, $\mathbb{p}_1, \dots, \mathbb{p}_n$ は A の (λ に対する) 固有ベクトル, $P = (\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n)$ は可逆行列 (直交行列) $\Leftrightarrow$ (b).

$$\because P^{-1}AP = D \Leftrightarrow AP = PD \Leftrightarrow (A\mathbb{p}_1 \cdots A\mathbb{p}_n) = (\lambda_1\mathbb{p}_1 \cdots \lambda_n\mathbb{p}_n). \quad \square$$

対角化法 (直交対角化法)

Step 1. A の 1 次独立な (正規直交する) 固有ベクトル $\mathbb{p}_1, \dots, \mathbb{p}_n$ をとる.

Step 2. $P = (\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n)$ とする. (P は可逆行列 (直交行列) となる)

Step 3. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} : \text{対角行列. } (\lambda_i \text{ は } \mathbb{p}_i \text{ に関する固有値})$

例

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

A の固有方程式

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - a & 0 \\ 0 & \lambda - a \end{pmatrix} = (\lambda - a)^2 = 0 \text{ より,}$$

A の固有値は $\lambda = a$ (2重根). 固有空間

$$W_a = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2 \text{ の基底}$$

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \dim(W_a) = 2. \text{ (当然) } A \text{ は対角化可能.}$$

一方で, B の固有方程式

$$\det(\lambda I - B) = \det \begin{pmatrix} \lambda - a & -1 \\ 0 & \lambda - a \end{pmatrix} = (\lambda - a)^2 = 0 \text{ より,}$$

B の固有値は $\lambda = a$ (2重根). 固有空間

$$\begin{aligned} W_a &= \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ (t \in \mathbb{R}) \right\} \text{ の基底 } \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dim(W_a) = 1. \end{aligned}$$

定理 2 から, B は対角化不可能.

応用： A^n を求める

例 (前回の例のつづき)

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値は $\lambda = 1, 5$ (2 重根).

固有空間 W_1 の基底 $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, W_5 の基底 $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = D$.

$$\therefore A = PDP^{-1}.$$

$$\begin{aligned} \therefore A^n &= (\cancel{PDP^{-1}})(\cancel{PDP^{-1}}) \cdots (\cancel{PDP^{-1}})(\cancel{PDP^{-1}}) \\ &= (\cancel{PDP^{-1}})(\cancel{PDP^{-1}}) \cdots (\cancel{PDP^{-1}})(\cancel{PDP^{-1}}) = PD^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+5^n) & \frac{1}{2}(1-5^n) & 0 \\ \frac{1}{2}(1-5^n) & \frac{1}{2}(1+5^n) & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

定理 3

$n \times n$ 行列 A の相異なる固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ に対する
固有ベクトル $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k$ は 1 次独立.

(証明) (背理法) 仮に $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k$ は 1 次従属と仮定してみる.

$\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_l$ が 1 次独立となる最大の $1 \leq l < k$ をとる

$\Rightarrow \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{l+1}$ は 1 次従属

$\Rightarrow c_1 \mathbf{p}_1 + \dots + c_{l+1} \mathbf{p}_{l+1} = \mathbf{0} \quad (\exists (c_1, \dots, c_{l+1}) \neq (0, \dots, 0)) \quad \cdots (1)$

$\Rightarrow A(c_1 \mathbf{p}_1 + \dots + c_{l+1} \mathbf{p}_{l+1}) = \mathbf{0}$

$\Rightarrow c_1 \lambda_1 \mathbf{p}_1 + \dots + c_{l+1} \lambda_{l+1} \mathbf{p}_{l+1} = \mathbf{0} \quad \cdots (2)$

$\Rightarrow c_1 (\lambda_{l+1} - \lambda_1) \mathbf{p}_1 + \dots + c_l (\lambda_{l+1} - \lambda_l) \mathbf{p}_l = \mathbf{0} \quad \cdots (1) \times \lambda_{l+1} - (2)$

$\Rightarrow c_1 (\lambda_{l+1} - \lambda_1) = \dots = c_l (\lambda_{l+1} - \lambda_l) = 0 \quad (\because \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_l \text{ は 1 次独立})$

$\Rightarrow c_1 = \dots = c_l = 0 \quad (\because \lambda_i \neq \lambda_j \ (i \neq j))$

$\Rightarrow c_{l+1} = 0 \quad (\because (1) \text{ より}) \Rightarrow (1) \text{ に矛盾.}$



定理 4 (定理 3 の系)

$A : n \times n$ 行列が n 個の相異なる固有値をもつ $\Rightarrow A$ は対角化可能.

(証明) 定理 2 + 定理 3. □

▶ 定理 4 の逆 ($\Leftarrow$) は成り立たない

定理 2' [(a) $\Leftrightarrow$ (b) は定理 2]

$A : n \times n$ 行列. 次は同値 :

- (a) A は対角化可能 ;
- (b) A は n 個の 1 次独立な固有ベクトルをもつ ;
- (c) A の固有方程式の解はすべて実数であり,
各固有値 λ_i (k_i 重根) に対して, $\dim(W_{\lambda_i}) = k_i$.

(証明) (c) $\Rightarrow$ (b) は定理 3 より従う. (b) $\Rightarrow$ (c) もよい (各自考える). □

6.3 直交対角化法；対称行列

定理 6

$A : n \times n$ 行列. A は直交対角化可能 $\Rightarrow A$ は対称行列, i.e. $A^t = A$.

(証明) $P^{-1}AP = D$ (対角行列) かつ $P^{-1} = P^t$ (直交行列)
 $\Rightarrow A^t = (PDP^{-1})^t = (PDP^t)^t = PDP^t = PDP^{-1} = A$. □

注意

実は, 定理 6 の逆 ($\Leftarrow$) も成立. つまり, 対称行列 A の固有方程式の解はすべて実数で, 各固有値 λ_i (k_i 重根) に対して, $\dim(W_{\lambda_i}) = k_i$ (定理 2').

例

対称行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ は直交対角化可能であり, 固有方程式

$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 4)^2(\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0$ より,

$\dim(W_4) = 2, \dim(W_1) = 2, \dim(W_2) = 1$. (各自直接たしかめてみる)

定理 7

対称行列 A の固有値 $\lambda \neq \lambda'$, $\mathbf{p} \in W_\lambda, \mathbf{p}' \in W_{\lambda'} \Rightarrow \langle \mathbf{p}, \mathbf{p}' \rangle = 0$ (直交).

(証明) $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \mathbf{p}' = \begin{pmatrix} p'_1 \\ \vdots \\ p'_n \end{pmatrix}$ に対して, $\langle \mathbf{p}, \mathbf{p}' \rangle = \mathbf{p}^t \mathbf{p}' = 0$ を示せば

よい. 1×1 行列 (a) に対して, $(a)^t = (a)$ に注意すれば,

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{p}^t \mathbf{p}' &= \lambda (\mathbf{p}'^t \mathbf{p})^t = \lambda (\mathbf{p}'^t \mathbf{p}) = \mathbf{p}'^t (\lambda \mathbf{p}) = \mathbf{p}'^t (A \mathbf{p}) = (\mathbf{p}^t A^t \mathbf{p}')^t \\ &= \mathbf{p}^t A^t \mathbf{p}' = \mathbf{p}^t A \mathbf{p}' = \mathbf{p}^t (\lambda' \mathbf{p}') = \lambda' \mathbf{p}^t \mathbf{p}'. \end{aligned}$$

$$\therefore (\lambda - \lambda') \mathbf{p}^t \mathbf{p}' = 0. \quad \therefore \mathbf{p}^t \mathbf{p}' = 0 \quad (\because \lambda \neq \lambda').$$



対称行列 A の直交対角化法

Step 1. A の各固有空間 W_{λ_i} の基底を **グラム・シュミットの正規直交化法** を用いて, 正規直交基底 $\mathbf{p}_{\lambda_i,1}, \dots, \mathbf{p}_{\lambda_i,k_i}$ ($\dim(W_{\lambda_i}) = k_i$) をもとめる.

Step 2. $P = (\mathbf{p}_{\lambda_1,1} \cdots \mathbf{p}_{\lambda_1,k_1} \cdots)$ とする. (P は **直交行列** となる)

Step 3. $P^{-1}AP$: 対角行列となる.

おまけ：ジョルダン標準形

定義 (ジョルダン細胞) $\cdots$ Jordan cell

次の形の $n \times n$ 行列を ジョルダン細胞 という：

$$J_{\lambda,n} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & O \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

定理 (ジョルダン標準形) $\cdots$ Jordan normal form

$A : n \times n$ 行列. $\exists P$: 可逆行列 s.t.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1,n_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & J_{\lambda_r,n_r} \end{pmatrix}.$$

さらに、ジョルダン細胞の並べ方を除いて一意的に定まる.

- ▶ 対角化可能 $\Leftrightarrow$ ジョルダン標準形のジョルダン細胞が n 個 ($\forall n_i=1$)
- ▶ $A \sim B$ (相似) $\Leftrightarrow A$ と B のジョルダン標準形は一致