

はじめに (線形代数 IIA)

線形代数 II = 線形代数 I のつづき

教科書 「やさしい線形代数, H. アントン著, 山下純一訳」 現代数学社

講義の情報 <http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス [LINK](#)

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと.
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

4.2 線形空間

注意

教科書では「線型」を使っているが、この授業では「線形」を使う。
「線型空間」→「線形空間」

V : 集合

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n \rightsquigarrow V$: 線形空間
一般化

注意

$\exists!$ は「一意の (ただ一つ) に存在」 ($\exists 1$ も同様)
 $\exists \sim \text{s.t.} \dots$ の s.t. は such that の略で $\dots$ をみたすような

定義 (線形空間 V) [$\mathbb{C}$ 上や体 K 上もあるがこの授業では扱わない]

V : 集合, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, \forall k, l \in \mathbb{R}$ が次の 10 個の公理をみたすとき, V を ($\mathbb{R}$ 上の) 線形空間, 元 $\mathbf{u} \in V$ を ベクトル という.

公理 1. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, 和 $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$ が定義されている.

2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (交換法則)

3. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ (結合法則)

4. $\exists! \mathbf{0} \in V$ s.t. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

5. $\forall \mathbf{u} \in V \exists! -\mathbf{u} \in V$ s.t. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$

($\mathbf{0}$ を ゼロ・ベクトル, $-\mathbf{u}$ を $\mathbf{u}$ の逆元 という)

公理 6. $\mathbf{u} \in V, k \in \mathbb{R}$, スカラー倍 $k\mathbf{u} \in V$ が定義されている.

7. $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$ (分配法則 1)

8. $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$ (分配法則 2)

9. $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$

10. $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$

注意

$\mathbb{R}^n$ は公理 1~10 をみたし線形空間. (ほかにも色々な線形空間がある)

例

$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$ 原点を通る $\mathbb{R}^3$ 内の平面は線形空間. (ベクトル (a, b, c) と直交する平面 $(a, b, c) \cdot (x, y, z) = 0$)

$\therefore \mathbb{R}^3$ は線形空間であり, $V \subset \mathbb{R}^3$ より V は公理 2,3,7,8,9,10 をみたす.
($\mathbb{R}^3$ 全体で成立)

(公理 1) $\mathfrak{u} = (u_1, u_2, u_3), \mathfrak{v} = (v_1, v_2, v_3) \in V$

$$\Rightarrow au_1 + bu_2 + cu_3 = 0, av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$$

$$\Rightarrow a(u_1 + v_1) + b(u_2 + v_2) + c(u_3 + v_3) = 0$$

$$\Rightarrow \mathfrak{u} + \mathfrak{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \in V.$$

(公理 4) $\mathfrak{0} = (0, 0, 0) \in V.$

(公理 5) $-\mathfrak{u} = (-u_1, -u_2, -u_3) \in V.$

$$(\because au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 \Rightarrow a(-u_1) + b(-u_2) + c(-u_3) = 0)$$

(公理 6) $k\mathfrak{u} = (ku_1, ku_2, ku_3) \in V.$

$$(\because au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 \Rightarrow a(ku_1) + b(ku_2) + c(ku_3) = k(au_1 + bu_2 + cu_3) = k \cdot 0 = 0).$$

例

$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = at, y = bt, z = ct (t \in \mathbb{R})\}$ 原点を通る $\mathbb{R}^3$ 内の直線は線形空間.

$\therefore$ 省略. 上の例と同様. (各自考えてみる)

例

$V = M_{m,n} = \{ \text{実数成分の } m \times n \text{ 行列} \}$ は線形空間.

$\therefore$ 和 : 行列の和, ゼロ・ベクトル : 零行列 $\mathbf{O}$,

逆元 : A の逆元は $-A$, スカラー倍 : 行列のスカラー倍 kA .

例

$V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ $\mathbb{R}$ 上の実数値関数全体は線形空間.

$\therefore$ 和 : $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$, ゼロ・ベクトル : $f = 0$,

逆元 : f の逆元は $-f$, スカラー倍 : $(kf)(x) := kf(x)$.

例

$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ は線形空間でない.

$\because (1, 1) \in V$ だが逆元 $-(1, 1) = (-1, -1) \notin V$.

例

$V = \{0\}$ ゼロ・ベクトルからなる1点集合は線形空間.

例えば, $V = \{(0, 0, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$.

例

$V = \{\text{実数列 } \{a_n\}\}$ 実数列全体は線形空間.

$\because a = \{a_n\}, b = \{b_n\}$ に対して,

和: $a + b := \{a_n + b_n\}$, ゼロ・ベクトル: $\{0\} = \{0, 0, 0, \dots\}$,

逆元: a の逆元は $-a := \{-a_n\}$, スカラー倍: $ka := \{ka_n\}$.

例

$V = \mathbb{R}[X] = \{f = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R}, n \geq 0\}$ 実数係数の
1 変数多項式全体は線形空間.

$\therefore$ 和 : 多項式の和 $f + g$, ゼロ・ベクトル : $0 \in \mathbb{R}$,
逆元 : f の逆元は $-f$, スカラー倍 : $kf \in V$.

例

$V = \mathbb{R}[X]_n = \{f = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ n 次以下の実数
係数の 1 変数多項式全体は線形空間.

$\therefore$ 和 : 多項式の和 $f + g$, ゼロ・ベクトル : $0 \in \mathbb{R}$,
逆元 : f の逆元は $-f$, スカラー倍 : $kf \in V$.

▶ 教 pp.161~163 の練習問題 4.2 を各自やってみる

定理 3

V : 線形空間, $\mathbf{u} \in V, k \in \mathbb{R}$.

$$(a) 0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (b) k \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}. \quad (c) (-1) \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u}.$$

$$(d) k \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow k = 0 \text{ または } \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

(証明) (公理 1 から公理 10 のみを用いて示す)

$$(a) 0 \cdot \mathbf{u} + 0 \cdot \mathbf{u} \underset{\text{公理 8}}{=} (0 + 0) \cdot \mathbf{u} = 0 \cdot \mathbf{u}. \text{ 公理 5 より } 0 \cdot \mathbf{u} \text{ の逆元 } -0 \cdot \mathbf{u} \text{ が存在し, 両辺に足すと } (0 \cdot \mathbf{u} + 0 \cdot \mathbf{u}) + (-0 \cdot \mathbf{u}) = 0 \cdot \mathbf{u} + (-0 \cdot \mathbf{u}) \underset{\text{公理 3,5}}{\Rightarrow}$$

$$0 \cdot \mathbf{u} + (0 \cdot \mathbf{u} + (-0 \cdot \mathbf{u})) = \mathbf{0} \underset{\text{公理 5}}{\Rightarrow} 0 \cdot \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \underset{\text{公理 4}}{\Rightarrow} 0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

$$(b) k \cdot \mathbf{0} \underset{\text{公理 4}}{=} k \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0}) \underset{\text{公理 7}}{=} k \cdot \mathbf{0} + k \cdot \mathbf{0}. \text{ よって公理 5 より, } k \cdot \mathbf{0} \text{ の逆元}$$

$$-k \cdot \mathbf{0} \text{ をとれば (a) と同様. (c) } \mathbf{u} + (-1) \cdot \mathbf{u} \underset{\text{公理 10}}{=} 1 \cdot \mathbf{u} + (-1) \cdot \mathbf{u}$$

$$\underset{\text{公理 8}}{=} (1 - 1) \cdot \mathbf{u} = 0 \cdot \mathbf{u} \underset{\text{(a)}}{=} \mathbf{0}. \text{ よって, } -\mathbf{u} = (-1) \cdot \mathbf{u}.$$

$$(d) \text{ (背理法) } k \neq 0 \text{ かつ } \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \text{ を仮定. } k \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ の両辺に } \frac{1}{k} \text{ をかけて,}$$
$$\text{(左辺)} \frac{1}{k} (k \cdot \mathbf{u}) \underset{\text{公理 9}}{=} 1 \cdot \mathbf{u} \underset{\text{公理 10}}{=} \mathbf{u}$$

$$\text{(右辺)} \frac{1}{k} \cdot \mathbf{0} \underset{\text{(b)}}{=} \mathbf{0}. \text{ よって } \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ となり矛盾.}$$

