

# はじめに (線形代数 IIA)

線形代数 II = 線形代数 I のつづき

教科書 「やさしい線形代数, H. アントン著, 山下純一訳」 現代数学社

講義の情報 <http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス [LINK](#)

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと.  
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

## 4.3 部分空間

$V$  : 線形空間.

### 定義 (部分空間)

$W \subset V$  が  $V$  上の和とスカラー倍を  $W$  に制限して線形空間をなすとき,  
 $W$  を  $V$  の 部分空間 という.

### 例

$\{0\} \subset V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\} \subset \mathbb{R}^3$  : 部分空間.

$\{0\} \subset V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = at, y = bt, z = ct (t \in \mathbb{R})\} \subset \mathbb{R}^3$  :  
部分空間.

### 注意

$V$  : 線形空間.

$W \subset V \Rightarrow W$  は公理 2, 3, 7, 8, 9, 10 をみたす.

よって, 公理 1, 4, 5, 6 のみチェックすればよい. さらに ...

## 定理 4

$V$  : 線形空間,  $W \subset V$  : 部分集合.

$W \subset V$  : 部分空間  $\iff$

(a)  $u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$  (公理 1)

( $W$  は 和について閉じている という)

(b)  $u \in W, k \in \mathbb{R} \Rightarrow ku \in W$  (公理 6).

( $W$  は スカラー倍について閉じている という)

$\therefore (\Rightarrow)$  公理 1~10 をみたすので OK.

( $\Leftarrow$ ) 上の注意より, 公理 4, 5 を示せばよい.

$u \in W$ . (b) より,  $0 \in \mathbb{R}$  で  $0 \cdot u = \underset{\text{定理 3}}{0} \in W$  より公理 4 は OK.

$-1 \in \mathbb{R}$  で  $(-1) \cdot u = \underset{\text{定理 3}}{-u} \in W$  より公理 5 も OK. □

## 注意

$V$  : 線形空間

$\Rightarrow V, \{0\}$  の 2 つは (いつも) 部分空間であり, 自明な部分空間 という.

## 例

$M_{2,2} = M_{2,2}(\mathbb{R})$  : 実数成分の  $2 \times 2$  行列全体.

$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_{2,2}$  : 部分空間.

$\therefore A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} \in W, k \in \mathbb{R}.$

$A + B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 & 0 \end{pmatrix} \in W, kA = \begin{pmatrix} 0 & ka_1 \\ kb_1 & 0 \end{pmatrix} \in W.$

よって, 定理 4 より OK.

## 例

$V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$  :  $\mathbb{R}$  上の実数値関数全体

$W = \mathbb{R}[X]_n$  :  $n$  次以下の多項式全体

$\Rightarrow W \subset V$  : 部分空間.

$\therefore f, g \in W, k \in \mathbb{R}.$

$(f + g)(x) := f(x) + g(x), (kf)(x) := kf(x)$  により,  $f + g, kf \in W.$

よって, 定理 4 より OK.

## 例

$V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\} : \mathbb{R}$  上の実数値関数全体

$W = C(-\infty, \infty) : \mathbb{R}$  上の実数値連続関数全体.

$\Rightarrow W \subset V : \text{部分空間.}$

$\because f, g \in W, k \in \mathbb{R} \Rightarrow f + g, kf \in W$  と定理 4 より OK.

## 例

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ に対し}$$

て,  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  は連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

を表す.  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  のとき,  $W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^n : \text{部分空間.}$

## 例

$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^n$  : 部分空間.

$\because \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in W, k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0}, A\mathbf{x}' = \mathbf{0}$

$\Rightarrow A(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = A\mathbf{x} + A\mathbf{x}' = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ . よって,  $\mathbf{x} + \mathbf{x}' \in W$ .

$A(k\mathbf{x}) = k(A\mathbf{x}) = k \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$  より,  $k\mathbf{x} \in W$ . 定理 4 より OK. □

## 注意

$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$  は  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  の 解空間 とよばれる.

(解全体が線形空間になっている!!  $\mathbb{R}^n$  の部分空間)

## 定義 (1 次結合でかける)

ベクトル  $w \in V$  がベクトル  $v_1, \dots, v_r \in V$  を用いて,  
 $w = k_1 v_1 + \dots + k_r v_r$  とかけるとき,  
 $w$  は  $v_1, \dots, v_r$  の 1 次結合でかける という。

## 例

$u = (1, 2, -1), v = (6, 4, 2) \in \mathbb{R}^3$ .

$w = (9, 2, 7)$  は  $u, v$  の **1 次結合でかける**。

$w' = (4, -1, 8)$  は  $u, v$  の **1 次結合でかけない**。

$\therefore w = k_1 u + k_2 v$  とすると,

$$(9, 2, 7) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$$

$$= (k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2).$$

これを解くと,  $k_1 = -3, k_2 = 2$ . すなわち,  $w = -3u + 2v$ .

$w' = k_1 u + k_2 v$  とすると,

$$(4, -1, 8) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$$

$= (k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2)$  の解はない. (各自)

