

はじめに (線形代数 IIA)

線形代数 II = 線形代数 I のつづき

教科書 「やさしい線形代数, H. アントン著, 山下純一訳」 現代数学社

講義の情報 <http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス [LINK](#)

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと.
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 & + x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 & - x_5 = 0 \\ & x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

の解空間 W の次元をもとめる．解は，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s - t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = s \mathbf{v}_1 + t \mathbf{v}_2.$$

$W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ であり，

$k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow k_1 = k_2 = 0$ より， $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ は1次独立．

$\therefore \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ は W の基底．

$\therefore \dim W = 2$.

定理 9

V : 線形空間, $\dim V = n$.

- (a) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ が 1 次独立 $\Rightarrow \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ は V の基底 ;
- (b) $V = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \Rightarrow \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ は V の基底 ;
- (c) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ が 1 次独立 ($r < n$) $\Rightarrow$ ベクトル $\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ を追加して, V の基底 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ を構成できる. (基底の延長 という)

(証明) (a) $V = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ を示す. $(\supset)$ は OK. $(\supsetneq)$ と仮定 (し, 矛盾を導く) $\Rightarrow \exists \mathbf{w} \in V$ s.t. $\mathbf{w} \notin \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \Rightarrow \mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ は 1 次独立 $\Rightarrow$ 定理 7 ($n+1$ 個以上のベクトルは 1 次従属) に矛盾.

(b) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ が 1 次独立を示す. $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ が 1 次従属と仮定 (し, 矛盾を導く). $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ の中で, 1 次独立な最大個数を $r (< n)$ とし, (必要ならば入れ替えて) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ を 1 次独立とする $\Rightarrow$ 残りの $\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n \in \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\} \Rightarrow V = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\} \Rightarrow \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ は V の基底 $\Rightarrow$ 定理 8 (基底の個数は一定) に矛盾.

(c) $\mathbf{v}_{r+1} \notin \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ をとる. $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r+1}$ は 1 次独立.

$r+1 = n \Rightarrow$ (a) より証明終. $r+1 < n \Rightarrow \mathbf{v}_{r+2}$ を加え, 同様に繰り返していけば, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r+k} = \mathbf{v}_n$ は 1 次独立で, (a) より証明終. □

4.6 行列の行空間と列空間；階数；基底の構成

定義 (行空間, 列空間)

$m \times n$ 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ に対して,

$\mathbf{r}_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, \mathbf{r}_m = (a_{m1}, \dots, a_{mn})$ を A の 行ベクトル,

$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{c}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ を A の 列ベクトル という.

$R(A) := \text{Span}\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m\} \subset \mathbb{R}^n : A$ の 行空間 (row space)

$C(A) := \text{Span}\{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\} \subset \mathbb{R}^m : A$ の 列空間 (column space).

例

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ に対し, $R(A) = \text{Span}\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$, $C(A) = \text{Span}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$.

定理 10

行列 A を行基本変形しても、行空間 $R(A)$ は変化しない.

i.e. $A \rightarrow B$: 行基本変形 $\Rightarrow R(A) = R(B)$.

(証明) 行基本変形

1. ある行を k ($\neq 0$) 倍する

2. 2つの行を交換

3. ある行に別の行の k 倍を加える

のうち, 2. は $R(A) = R(B)$ となる. 1. または 3. で A の行ベクトル

$\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m$ から B の行ベクトル $\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_m$ がえられたとすると,

$R(B) = \text{Span}\{\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_m\} \subset R(A) = \text{Span}\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m\}$. $A \rightarrow B$ のとき $B \rightarrow A$ (逆の基本変形) とできるので, $R(A) \subset R(B)$ も従う. $\square$

定理 11(定理 10 の系)

行列 A のガウス行列の 0 でない行ベクトル $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_r$ は $R(A)$ の基底.

注意

ガウス行列や先頭の 1 (初 1) を復習しておくこと. (教 p.17)

例

$$V = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\} \subset \mathbb{R}^5,$$

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 0, 0, 3), \mathbf{v}_2 = (2, -5, -3, -2, 6),$$

$$\mathbf{v}_3 = (0, 5, 15, 10, 0), \mathbf{v}_4 = (2, 6, 18, 8, 6) \in \mathbb{R}^5.$$

V の基底と次元をもとめよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{pmatrix} \text{ とすれば, } R(A) = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}.$$

行基本変形によってガウス行列をもとめると：

$$A \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ 定理 11 より, } V = R(A) \text{ の基底は,}$$

$$\mathbf{w}_1 = (1, -2, 0, 0, 3), \mathbf{w}_2 = (0, 1, 3, 2, 0), \mathbf{w}_3 = (0, 0, 1, 1, 0) \text{ であり,}$$

$$\dim V = 3.$$