

# はじめに (線形代数 IIA)

線形代数 II = 線形代数 I のつづき

教科書 「やさしい線形代数, H. アントン著, 山下純一訳」 現代数学社

講義の情報 <http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス [LINK](#)

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと.  
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

## 例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \text{ の列空間 } C(A) \text{ の基底を構成せよ.}$$

前回の行空間  $R(A)$  に対して, 行  $\leftrightarrow$  列 とする. (転置する)

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (行基本変形で } \textcolor{blue}{\text{ガウス行列}} \text{ に)}$$

$\therefore (1, 3, 0), (0, 1, 2) : R(A^t)$  の基底 (前回の定理 11 より)

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} : C(A) \text{ の基底}$$

## 定理 12

$$\dim R(A) = \dim C(A).$$

(証明)  $R(A) = \text{Span}\{r_1, \dots, r_m\}$  の基底を  $b_1, \dots, b_l$

$$(\mathbf{b}_i = (b_{i1}, \dots, b_{in})) \text{ とすれば, } \begin{cases} r_1 = c_{11}b_1 + \dots + c_{1l}b_l \\ \vdots \\ r_m = c_{m1}b_1 + \dots + c_{ml}b_l. \end{cases}$$

つまり,  $1 \leq \forall j \leq n$  に対して,  $\begin{cases} a_{1j} = c_{11}b_{1j} + \dots + c_{1l}b_{lj} \\ \vdots \\ a_{mj} = c_{m1}b_{1j} + \dots + c_{ml}b_{lj} \end{cases}$  であり,

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = b_{1j} \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix} + \dots + b_{lj} \begin{pmatrix} c_{1l} \\ \vdots \\ c_{ml} \end{pmatrix} \text{ より, } \dim C(A) \leq \dim R(A) = l.$$

以上の議論を  $A \rightarrow A^t$  とすれば,

$$\dim R(A) = \dim C(A^t) \leq \dim R(A^t) = \dim C(A).$$

$$\therefore \dim R(A) = \dim C(A).$$



## 定義 (階数)

$\dim R(A)$  ( $= \dim C(A)$ ) を行列  $A$  の 階数 といい,  $\text{rank}(A)$  とかく.

## 注意

行列  $A$  の 階数  $\text{rank}(A)$  とは,  $A$  を行基本変形してガウス行列にしたときの 階 段の 数 (先頭の 1, 初 1 の個数) に等しい.

## 定理 13

$A : n \times n$  行列. 次の (a)~(h) は同値 :

- (a)  $A$  は可逆 (正則) ;
- (b)  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  は  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  以外の解をもたない ;
- (c)  $A$  と単位行列  $I_n$  は行同値 ;
- (d)  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  は任意の  $\mathbf{b}$  について解をもつ ;
- (e)  $\det(A) \neq 0$  ;
- (f)  $\text{rank}(A) = n$  ;
- (g)  $A$  の行ベクトル  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$  は 1 次独立 ;
- (h)  $A$  の列ベクトル  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$  は 1 次独立 ;
- (c')  $A$  を行基本変形で既約ガウス行列にすると単位行列  $I_n$  となる.

既約ガウス行列 ... 先頭の 1 の上下が全て 0. (c)  $\Leftrightarrow$  (c') は OK.

(証明) (a)  $\Leftrightarrow$  (b)  $\Leftrightarrow$  (c)  $\Leftrightarrow$  (d) は OK. (1.7 節, 定理 13, 教 p.65)

(a)  $\Leftrightarrow$  (e) も OK. (2.3 節, 定理 6, 教 p.91)

よって, (c)  $\Leftrightarrow$  (f)  $\Leftrightarrow$  (g)  $\Leftrightarrow$  (h) を示せばよい.

以下, (c)  $\Rightarrow$  (f)  $\Rightarrow$  (g)  $\Rightarrow$  (h)  $\Rightarrow$  (c') の順に示す.

(c)  $\Rightarrow$  (f) :  $A \rightarrow \cdots \rightarrow I_n$  (行基本変形)

$\Rightarrow \dim R(A) = n \Leftrightarrow \text{rank}(A) = n$ .

(f)  $\Rightarrow$  (g) :  $\text{rank}(A) = n$

$\Leftrightarrow \dim R(A) = n \Rightarrow R(A) = \text{Span}\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n\}$  より  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$  は  $R(A)$  の基底 ( $\because$  定理 9(b))  $\Rightarrow \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n : 1$  次独立.

(g)  $\Rightarrow$  (h) :  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n : 1$  次独立

$\Rightarrow \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$  は  $R(A) = \text{Span}\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n\}$  の基底  $\Rightarrow \dim R(A) = n$

$\Rightarrow \dim C(A) = n$  ( $\because$  定理 12)

$\Rightarrow C(A) = \text{Span}\{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$  で  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$  は 1 次独立.

(h)  $\Rightarrow$  (c') :  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$  は 1 次独立

$\Rightarrow \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$  は  $C(A) = \text{Span}\{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$  の基底  $\Rightarrow \dim C(A) = n$

$\Rightarrow \dim R(A) = n$  ( $\because$  定理 12)  $\Rightarrow A$  の既約ガウス行列の行ベクトルはすべて  $\mathbf{0}$  でなく, 既約ガウス行列は  $I_n$  に等しい. □

## 定理 14

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  が解をもつ  $\Leftrightarrow \mathbf{b} \in C(A)$ .

(証明)  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

よって,  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  が解をもつ  $\Leftrightarrow \mathbf{b} \in C(A)$ .



▶ 教 pp.196~198 の練習問題 4.6 を各自やってみる