はじめに　(線形代数 IIA)

$\boxed{\text{線形代数 II} \quad = \quad \text{線形代数 I のつづき}}$

教科書　「やさしい線形代数，H．アントン著，山下純一訳」現代数学社

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと．
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 $\longrightarrow$ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ の列空間 $C(A)$ の基底を構成せよ.

例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$ の列空間 $C(A)$ の基底を構成せよ．

前回の行空間 $R(A)$ に対して，行 $\leftrightarrow$ 列とする．(転置する)

例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ の列空間 $C(A)$ の基底を構成せよ．

前回の行空間 $R(A)$ に対して，行 $\leftrightarrow$ 列とする．(転置する)

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(行基本変形でガウス行列に)

例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ の列空間 $C(A)$ の基底を構成せよ.

前回の行空間 $R(A)$ に対して，行 $\leftrightarrow$ 列とする．(転置する)

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ (行基本変形で ガウス行列に)

$\therefore\ (1,3,0),(0,1,2)$: $R(A^t)$ の基底 (前回の定理 11 より)

例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$ の列空間 $C(A)$ の基底を構成せよ．

前回の行空間 $R(A)$ に対して，行 $\leftrightarrow$ 列とする．(転置する)

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ (行基本変形で ガウス行列に)

$\therefore\ (1,3,0),(0,1,2)$: $R(A^t)$ の基底 (前回の定理 11 より)

$$\therefore\ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$: $C(A)$ の基底

定理 12

$\dim R(A) = \dim C(A)$.

定理 12

$\dim R(A) = \dim C(A)$.

(証明) $R(A) = \mathrm{Span}\{\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_m\}$ の基底を $\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_l$

$(\mathbb{b}_i = (b_{i1}, \ldots, b_{in}))$ とすれば,

定理 12

$\dim R(A) = \dim C(A)$.

(証明) $R(A) = \mathrm{Span}\{\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_m\}$ の基底を $\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_l$

$(\mathbb{b}_i = (b_{i1}, \ldots, b_{in}))$ とすれば, $\begin{cases} \mathbb{r}_1 = c_{11}\mathbb{b}_1 + \cdots + c_{1l}\mathbb{b}_l \\ \quad \vdots \\ \mathbb{r}_m = c_{m1}\mathbb{b}_1 + \cdots + c_{ml}\mathbb{b}_l. \end{cases}$

定理 12

$\dim R(A) = \dim C(A)$.

(証明) $R(A) = \mathrm{Span}\{\mathbb{r}_1, \dots, \mathbb{r}_m\}$ の基底を $\mathbb{b}_1, \dots, \mathbb{b}_l$

$(\mathbb{b}_i = (b_{i1}, \dots, b_{in}))$ とすれば，
$$\begin{cases} \mathbb{r}_1 &= c_{11}\mathbb{b}_1 + \cdots + c_{1l}\mathbb{b}_l \\ &\vdots \\ \mathbb{r}_m &= c_{m1}\mathbb{b}_1 + \cdots + c_{ml}\mathbb{b}_l. \end{cases}$$

つまり，$1 \leq \forall j \leq n$ に対して，
$$\begin{cases} a_{1j} &= c_{11}b_{1j} + \cdots + c_{1l}b_{lj} \\ &\vdots \\ a_{mj} &= c_{m1}b_{1j} + \cdots + c_{ml}b_{lj} \end{cases}$$
であり，

定理 12

$\dim R(A) = \dim C(A)$.

(証明) $R(A) = \mathrm{Span}\{\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_m\}$ の基底を $\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_l$

$(\mathbb{b}_i = (b_{i1}, \ldots, b_{in}))$ とすれば，
$$\begin{cases} \mathbb{r}_1 &= c_{11}\mathbb{b}_1 + \cdots + c_{1l}\mathbb{b}_l \\ & \vdots \\ \mathbb{r}_m &= c_{m1}\mathbb{b}_1 + \cdots + c_{ml}\mathbb{b}_l. \end{cases}$$

つまり，$1 \leq \forall j \leq n$ に対して，
$$\begin{cases} a_{1j} &= c_{11}b_{1j} + \cdots + c_{1l}b_{lj} \\ & \vdots \\ a_{mj} &= c_{m1}b_{1j} + \cdots + c_{ml}b_{lj} \end{cases}$$
であり，

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = b_{1j}\begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + b_{lj}\begin{pmatrix} c_{1l} \\ \vdots \\ c_{ml} \end{pmatrix}$$
より，

定理 12

$\dim R(A) = \dim C(A)$.

(証明) $R(A) = \mathrm{Span}\{\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_m\}$ の基底を $\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_l$

$(\mathbb{b}_i = (b_{i1}, \ldots, b_{in}))$ とすれば，
$$\begin{cases} \mathbb{r}_1 &= c_{11}\mathbb{b}_1 + \cdots + c_{1l}\mathbb{b}_l \\ & \vdots \\ \mathbb{r}_m &= c_{m1}\mathbb{b}_1 + \cdots + c_{ml}\mathbb{b}_l. \end{cases}$$

つまり，$1 \leq \forall j \leq n$ に対して，
$$\begin{cases} a_{1j} &= c_{11}b_{1j} + \cdots + c_{1l}b_{lj} \\ & \vdots \\ a_{mj} &= c_{m1}b_{1j} + \cdots + c_{ml}b_{lj} \end{cases}$$
であり，

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = b_{1j}\begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + b_{lj}\begin{pmatrix} c_{1l} \\ \vdots \\ c_{ml} \end{pmatrix}$$
より，$\dim C(A) \leq \dim R(A) = l$.

定理 12

$\dim R(A) = \dim C(A)$.

(証明) $R(A) = \mathrm{Span}\{\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_m\}$ の基底を $\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_l$

$(\mathbb{b}_i = (b_{i1}, \ldots, b_{in}))$ とすれば，
$$\begin{cases} \mathbb{r}_1 &= c_{11}\mathbb{b}_1 + \cdots + c_{1l}\mathbb{b}_l \\ &\vdots \\ \mathbb{r}_m &= c_{m1}\mathbb{b}_1 + \cdots + c_{ml}\mathbb{b}_l. \end{cases}$$

つまり，$1 \leq \forall j \leq n$ に対して，
$$\begin{cases} a_{1j} &= c_{11}b_{1j} + \cdots + c_{1l}b_{lj} \\ &\vdots \\ a_{mj} &= c_{m1}b_{1j} + \cdots + c_{ml}b_{lj} \end{cases}$$
であり，

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = b_{1j}\begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + b_{lj}\begin{pmatrix} c_{1l} \\ \vdots \\ c_{ml} \end{pmatrix}$$
より，$\dim C(A) \leq \dim R(A) = l$.

以上の議論を $A \to A^t$ とすれば，

定理 12

$\dim R(A) = \dim C(A)$.

(証明) $R(A) = \mathrm{Span}\{\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_m\}$ の基底を $\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_l$

$(\mathbb{b}_i = (b_{i1}, \ldots, b_{in}))$ とすれば, $\begin{cases} \mathbb{r}_1 &= c_{11}\mathbb{b}_1 + \cdots + c_{1l}\mathbb{b}_l \\ & \vdots \\ \mathbb{r}_m &= c_{m1}\mathbb{b}_1 + \cdots + c_{ml}\mathbb{b}_l. \end{cases}$

つまり, $1 \leq \forall j \leq n$ に対して, $\begin{cases} a_{1j} &= c_{11}b_{1j} + \cdots + c_{1l}b_{lj} \\ & \vdots \\ a_{mj} &= c_{m1}b_{1j} + \cdots + c_{ml}b_{lj} \end{cases}$ であり,

$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = b_{1j}\begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + b_{lj}\begin{pmatrix} c_{1l} \\ \vdots \\ c_{ml} \end{pmatrix}$ より, $\dim C(A) \leq \dim R(A) = l$.

以上の議論を $A \to A^t$ とすれば,

$\dim R(A) = \dim C(A^t) \leq \dim R(A^t) = \dim C(A)$.

定理 12

$\dim R(A) = \dim C(A)$.

(証明) $R(A) = \mathrm{Span}\{\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_m\}$ の基底を $\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_l$

$(\mathbb{b}_i = (b_{i1}, \ldots, b_{in}))$ とすれば, $\begin{cases} \mathbb{r}_1 &= c_{11}\mathbb{b}_1 + \cdots + c_{1l}\mathbb{b}_l \\ & \vdots \\ \mathbb{r}_m &= c_{m1}\mathbb{b}_1 + \cdots + c_{ml}\mathbb{b}_l. \end{cases}$

つまり, $1 \leq \forall j \leq n$ に対して, $\begin{cases} a_{1j} &= c_{11}b_{1j} + \cdots + c_{1l}b_{lj} \\ & \vdots \\ a_{mj} &= c_{m1}b_{1j} + \cdots + c_{ml}b_{lj} \end{cases}$ であり,

$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = b_{1j}\begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + b_{lj}\begin{pmatrix} c_{1l} \\ \vdots \\ c_{ml} \end{pmatrix}$ より, $\dim C(A) \leq \dim R(A) = l$.

以上の議論を $A \to A^t$ とすれば,

$\dim R(A) = \dim C(A^t) \leq \dim R(A^t) = \dim C(A)$.

$\therefore\ \dim R(A) = \dim C(A)$. □

定義 (階数)

$\dim R(A)$ $(= \dim C(A))$ を行列 A の <u>階数</u> といい，$\underline{\mathrm{rank}(A)}$ とかく．

定義 (階数)

$\dim R(A)$ $(= \dim C(A))$ を行列 A の 階数 といい，$\underline{\mathrm{rank}(A)}$ とかく．

注意

行列 A の階数 $\mathrm{rank}(A)$ とは，A を行基本変形してガウス行列にしたときの 階 段の 数(先頭の 1，初 1 の個数) に等しい．

定理 13

A：$n \times n$ 行列．次の (a)〜(h) は同値：

定理 13

A : $n \times n$ 行列．次の (a)〜(h) は同値：

(a) A は可逆 (正則)；

定理 13

$A : n \times n$ 行列．次の (a)〜(h) は同値：

(a) A は可逆 (正則)；

(b) $A\mathbb{x} = \mathbb{o}$ は $\mathbb{x} = \mathbb{o}$ 以外の解をもたない；

定理 13

A : $n \times n$ 行列．次の (a)〜(h) は同値：

(a) A は可逆 (正則)；

(b) $A\mathbb{x} = \mathbb{o}$ は $\mathbb{x} = \mathbb{o}$ 以外の解をもたない；

(c) A と単位行列 I_n は行同値；

定理 13

A : $n \times n$ 行列．次の (a)〜(h) は同値：

(a) A は可逆 (正則)；

(b) $A\mathbb{x} = \mathbb{o}$ は $\mathbb{x} = \mathbb{o}$ 以外の解をもたない；

(c) A と単位行列 I_n は行同値；

(d) $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ は任意の $\mathbb{b}$ について解をもつ；

定理 13

A：$n \times n$ 行列．次の (a)〜(h) は同値：

(a) A は可逆 (正則)；

(b) $A\mathbb{x} = \mathbb{o}$ は $\mathbb{x} = \mathbb{o}$ 以外の解をもたない；

(c) A と単位行列 I_n は行同値；

(d) $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ は任意の $\mathbb{b}$ について解をもつ；

(e) $\det(A) \neq 0$;

定理 13

$A : n \times n$ 行列．次の (a)〜(h) は同値：

(a) A は可逆 (正則)；

(b) $A\mathbb{x} = \mathbb{o}$ は $\mathbb{x} = \mathbb{o}$ 以外の解をもたない；

(c) A と単位行列 I_n は行同値；

(d) $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ は任意の $\mathbb{b}$ について解をもつ；

(e) $\det(A) \neq 0$;

(f) $\mathrm{rank}(A) = n$;

定理 13

A：$n \times n$ 行列．次の (a)〜(h) は同値：

(a) A は可逆 (正則)；

(b) $A\mathbb{x} = \mathbb{o}$ は $\mathbb{x} = \mathbb{o}$ 以外の解をもたない；

(c) A と単位行列 I_n は行同値；

(d) $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ は任意の $\mathbb{b}$ について解をもつ；

(e) $\det(A) \neq 0$;

(f) $\mathrm{rank}(A) = n$;

(g) A の行ベクトル $\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$ は 1 次独立；

定理 13

A：$n \times n$ 行列．次の (a)〜(h) は同値：

(a) A は可逆 (正則)；

(b) $A\mathbb{x} = \mathbb{o}$ は $\mathbb{x} = \mathbb{o}$ 以外の解をもたない；

(c) A と単位行列 I_n は行同値；

(d) $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ は任意の $\mathbb{b}$ について解をもつ；

(e) $\det(A) \neq 0$;

(f) $\operatorname{rank}(A) = n$;

(g) A の行ベクトル $\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$ は 1 次独立；

(h) A の列ベクトル $\mathbb{c}_1, \ldots, \mathbb{c}_n$ は 1 次独立；

定理 13

A：$n \times n$ 行列．次の (a)〜(h) は同値：

(a) A は可逆 (正則)；

(b) $A\mathbb{x} = \mathbb{o}$ は $\mathbb{x} = \mathbb{o}$ 以外の解をもたない；

(c) A と単位行列 I_n は行同値；

(d) $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ は任意の $\mathbb{b}$ について解をもつ；

(e) $\det(A) \neq 0$;

(f) $\mathrm{rank}(A) = n$;

(g) A の行ベクトル $\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$ は 1 次独立；

(h) A の列ベクトル $\mathbb{c}_1, \ldots, \mathbb{c}_n$ は 1 次独立；

(c') A を行基本変形で既約ガウス行列にすると単位行列 I_n となる．

定理 13

A : $n \times n$ 行列．次の (a)〜(h) は同値：

(a) A は可逆 (正則)；

(b) $A\mathbb{x} = \mathbb{o}$ は $\mathbb{x} = \mathbb{o}$ 以外の解をもたない；

(c) A と単位行列 I_n は行同値；

(d) $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ は任意の $\mathbb{b}$ について解をもつ；

(e) $\det(A) \neq 0$;

(f) $\operatorname{rank}(A) = n$;

(g) A の行ベクトル $\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$ は 1 次独立；

(h) A の列ベクトル $\mathbb{c}_1, \ldots, \mathbb{c}_n$ は 1 次独立；

(c') A を行基本変形で既約ガウス行列にすると単位行列 I_n となる．

既約ガウス行列 ⋯ 先頭の 1 の上下が全て 0. $(c) \Leftrightarrow (c')$ は OK.

定理 13

A : $n \times n$ 行列．次の (a)〜(h) は同値：

(a) A は可逆 (正則)；

(b) $A\mathbb{x} = \mathbb{o}$ は $\mathbb{x} = \mathbb{o}$ 以外の解をもたない；

(c) A と単位行列 I_n は行同値；

(d) $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ は任意の $\mathbb{b}$ について解をもつ；

(e) $\det(A) \neq 0$;

(f) $\mathrm{rank}(A) = n$;

(g) A の行ベクトル $\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$ は 1 次独立；

(h) A の列ベクトル $\mathbb{c}_1, \ldots, \mathbb{c}_n$ は 1 次独立；

(c') A を行基本変形で既約ガウス行列にすると単位行列 I_n となる．

既約ガウス行列 $\cdots$ 先頭の 1 の上下が全て 0. $(c) \Leftrightarrow (c')$ は OK.

(証明) $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d)$ は OK. (1.7 節，定理 13，教 p.65)

定理 13

A : $n \times n$ 行列．次の (a)〜(h) は同値：

(a) A は可逆 (正則)；

(b) $A\mathbb{x} = \mathbb{o}$ は $\mathbb{x} = \mathbb{o}$ 以外の解をもたない；

(c) A と単位行列 I_n は行同値；

(d) $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ は任意の $\mathbb{b}$ について解をもつ；

(e) $\det(A) \neq 0$;

(f) $\mathrm{rank}(A) = n$;

(g) A の行ベクトル $\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$ は 1 次独立；

(h) A の列ベクトル $\mathbb{c}_1, \ldots, \mathbb{c}_n$ は 1 次独立；

(c') A を行基本変形で既約ガウス行列にすると単位行列 I_n となる．

既約ガウス行列 ⋯ 先頭の 1 の上下が全て 0. $(c) \Leftrightarrow (c')$ は OK.

(証明) $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d)$ は OK. (1.7 節，定理 13，教 p.65)
$(a) \Leftrightarrow (e)$ も OK. (2.3 節，定理 6，教 p.91)

定理 13

A：$n \times n$ 行列．次の (a)〜(h) は同値：
(a) A は可逆 (正則)；
(b) $A\mathbb{x} = \mathbb{o}$ は $\mathbb{x} = \mathbb{o}$ 以外の解をもたない；
(c) A と単位行列 I_n は行同値；
(d) $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ は任意の $\mathbb{b}$ について解をもつ；
(e) $\det(A) \neq 0$;
(f) $\mathrm{rank}(A) = n$;
(g) A の行ベクトル $\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$ は 1 次独立；
(h) A の列ベクトル $\mathbb{c}_1, \ldots, \mathbb{c}_n$ は 1 次独立；
(c') A を行基本変形で既約ガウス行列にすると単位行列 I_n となる．

既約ガウス行列 ⋯ 先頭の 1 の上下が全て 0. $(c) \Leftrightarrow (c')$ は OK.

(証明) $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d)$ は OK. (1.7 節，定理 13，教 p.65)
$(a) \Leftrightarrow (e)$ も OK. (2.3 節，定理 6，教 p.91)
よって，$(c) \Leftrightarrow (f) \Leftrightarrow (g) \Leftrightarrow (h)$ を示せばよい．

定理 13

A : $n \times n$ 行列．次の (a)〜(h) は同値：

(a) A は可逆 (正則)；

(b) $A\mathbb{x} = \mathbb{o}$ は $\mathbb{x} = \mathbb{o}$ 以外の解をもたない；

(c) A と単位行列 I_n は行同値；

(d) $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ は任意の $\mathbb{b}$ について解をもつ；

(e) $\det(A) \neq 0$;

(f) $\mathrm{rank}(A) = n$;

(g) A の行ベクトル $\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$ は 1 次独立；

(h) A の列ベクトル $\mathbb{c}_1, \ldots, \mathbb{c}_n$ は 1 次独立；

(c') A を行基本変形で既約ガウス行列にすると単位行列 I_n となる．

既約ガウス行列 ⋯ 先頭の 1 の上下が全て 0. $(c) \Leftrightarrow (c')$ は OK.

(証明) $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d)$ は OK. (1.7 節，定理 13，教 p.65)

$(a) \Leftrightarrow (e)$ も OK. (2.3 節，定理 6，教 p.91)

よって，$(c) \Leftrightarrow (f) \Leftrightarrow (g) \Leftrightarrow (h)$ を示せばよい．

以下，$(c) \Rightarrow (f) \Rightarrow (g) \Rightarrow (h) \Rightarrow (c')$ の順に示す．

$(c) \Rightarrow (f)$:

$(c) \Rightarrow (f)$: $A \to \cdots \to I_n$ (行基本変形)

$(c) \Rightarrow (f)$: $A \to \cdots \to I_n$ (行基本変形)
$\Rightarrow \dim R(A) = n \Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) = n.$

$(c) \Rightarrow (f)$: $A \to \cdots \to I_n$ (行基本変形)
$\Rightarrow \dim R(A) = n \Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) = n.$

$(f) \Rightarrow (g)$:

$(c) \Rightarrow (f)$: $A \to \cdots \to I_n$ (行基本変形)
$\Rightarrow \dim R(A) = n \Leftrightarrow \mathrm{rank}(A) = n.$

$(f) \Rightarrow (g)$: $\mathrm{rank}(A) = n$

$(c) \Rightarrow (f)$: $A \to \cdots \to I_n$ (行基本変形)
$\Rightarrow \dim R(A) = n \Leftrightarrow \mathrm{rank}(A) = n.$

$(f) \Rightarrow (g)$: $\mathrm{rank}(A) = n$
$\Leftrightarrow \dim R(A) = n \Rightarrow R(A) = \mathrm{Span}\{\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n\}$ より $\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$ は $R(A)$ の基底 ($\because$ 定理 9(b)) $\Rightarrow \mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$: 1 次独立.

$(c) \Rightarrow (f)$: $A \to \cdots \to I_n$ (行基本変形)
$\Rightarrow \dim R(A) = n \Leftrightarrow \mathrm{rank}(A) = n$.

$(f) \Rightarrow (g)$: $\mathrm{rank}(A) = n$
$\Leftrightarrow \dim R(A) = n \Rightarrow R(A) = \mathrm{Span}\{\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n\}$ より $\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$ は $R(A)$ の基底 ($\because$ 定理 9(b)) $\Rightarrow \mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$: 1 次独立.

$(g) \Rightarrow (h)$:

$(c) \Rightarrow (f)$: $A \to \cdots \to I_n$ (行基本変形)
$\Rightarrow \dim R(A) = n \Leftrightarrow \mathrm{rank}(A) = n$.

$(f) \Rightarrow (g)$: $\mathrm{rank}(A) = n$
$\Leftrightarrow \dim R(A) = n \Rightarrow R(A) = \mathrm{Span}\{\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n\}$ より $\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$ は $R(A)$ の基底 ($\because$ 定理 9(b)) $\Rightarrow \mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$: 1 次独立.

$(g) \Rightarrow (h)$: $\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$: 1 次独立

$(c) \Rightarrow (f)$: $A \to \cdots \to I_n$ (行基本変形)
$\Rightarrow \dim R(A) = n \Leftrightarrow \mathrm{rank}(A) = n.$

$(f) \Rightarrow (g)$: $\mathrm{rank}(A) = n$
$\Leftrightarrow \dim R(A) = n \Rightarrow R(A) = \mathrm{Span}\{\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n\}$ より $\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$ は $R(A)$ の基底 ($\because$ 定理 9(b)) $\Rightarrow \mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$: 1 次独立.

$(g) \Rightarrow (h)$: $\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$: 1 次独立
$\Rightarrow \mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$ は $R(A) = \mathrm{Span}\{\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n\}$ の基底 $\Rightarrow \dim R(A) = n$
$\Rightarrow \dim C(A) = n$ ($\because$ 定理 12)
$\Rightarrow C(A) = \mathrm{Span}\{\mathbb{c}_1, \ldots, \mathbb{c}_n\}$ で $\mathbb{c}_1, \ldots, \mathbb{c}_n$ は 1 次独立.

$(c) \Rightarrow (f)$: $A \to \cdots \to I_n$ (行基本変形)
$\Rightarrow \dim R(A) = n \Leftrightarrow \mathrm{rank}(A) = n$.

$(f) \Rightarrow (g)$: $\mathrm{rank}(A) = n$
$\Leftrightarrow \dim R(A) = n \Rightarrow R(A) = \mathrm{Span}\{\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n\}$ より $\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$ は $R(A)$ の基底 ($\because$ 定理 9(b)) $\Rightarrow \mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$: 1 次独立.

$(g) \Rightarrow (h)$: $\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$: 1 次独立
$\Rightarrow \mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$ は $R(A) = \mathrm{Span}\{\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n\}$ の基底 $\Rightarrow \dim R(A) = n$
$\Rightarrow \dim C(A) = n$ ($\because$ 定理 12)
$\Rightarrow C(A) = \mathrm{Span}\{\mathbb{c}_1, \ldots, \mathbb{c}_n\}$ で $\mathbb{c}_1, \ldots, \mathbb{c}_n$ は 1 次独立.

$(h) \Rightarrow (c')$:

$(c) \Rightarrow (f)$: $A \to \cdots \to I_n$ (行基本変形)
$\Rightarrow \dim R(A) = n \Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) = n$.

$(f) \Rightarrow (g)$: $\operatorname{rank}(A) = n$
$\Leftrightarrow \dim R(A) = n \Rightarrow R(A) = \operatorname{Span}\{\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n\}$ より $\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$ は $R(A)$ の基底 ($\because$ 定理 9(b)) $\Rightarrow \mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$: 1 次独立.

$(g) \Rightarrow (h)$: $\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$: 1 次独立
$\Rightarrow \mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$ は $R(A) = \operatorname{Span}\{\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n\}$ の基底 $\Rightarrow \dim R(A) = n$
$\Rightarrow \dim C(A) = n$ ($\because$ 定理 12)
$\Rightarrow C(A) = \operatorname{Span}\{\mathbb{c}_1, \ldots, \mathbb{c}_n\}$ で $\mathbb{c}_1, \ldots, \mathbb{c}_n$ は 1 次独立.

$(h) \Rightarrow (c')$: $\mathbb{c}_1, \ldots, \mathbb{c}_n$ は 1 次独立

$(c) \Rightarrow (f)$: $A \to \cdots \to I_n$ (行基本変形)
$\Rightarrow \dim R(A) = n \Leftrightarrow \mathrm{rank}(A) = n$.

$(f) \Rightarrow (g)$: $\mathrm{rank}(A) = n$
$\Leftrightarrow \dim R(A) = n \Rightarrow R(A) = \mathrm{Span}\{\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n\}$ より $\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$ は $R(A)$ の基底 ($\because$ 定理 9(b)) $\Rightarrow \mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$: 1 次独立.

$(g) \Rightarrow (h)$: $\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$: 1 次独立
$\Rightarrow \mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$ は $R(A) = \mathrm{Span}\{\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n\}$ の基底 $\Rightarrow \dim R(A) = n$
$\Rightarrow \dim C(A) = n$ ($\because$ 定理 12)
$\Rightarrow C(A) = \mathrm{Span}\{\mathbb{c}_1, \ldots, \mathbb{c}_n\}$ で $\mathbb{c}_1, \ldots, \mathbb{c}_n$ は 1 次独立.

$(h) \Rightarrow (c')$: $\mathbb{c}_1, \ldots, \mathbb{c}_n$ は 1 次独立
$\Rightarrow \mathbb{c}_1, \ldots, \mathbb{c}_n$ は $C(A) = \mathrm{Span}\{\mathbb{c}_1, \ldots, \mathbb{c}_n\}$ の基底 $\Rightarrow \dim C(A) = n$
$\Rightarrow \dim R(A) = n$ ($\because$ 定理 12) $\Rightarrow$ A の既約ガウス行列の行ベクトルはすべて $\mathbb{o}$ でなく，既約ガウス行列は I_n に等しい. $\square$

定理 14

$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ が解をもつ $\Leftrightarrow \mathbb{b} \in C(A)$.

定理 14

$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ が解をもつ $\Leftrightarrow \mathbb{b} \in C(A)$.

(証明) $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$

定理 14

$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ が解をもつ $\Leftrightarrow \mathbb{b} \in C(A)$.

(証明) $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

定理 14

$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ が解をもつ $\Leftrightarrow \mathbb{b} \in C(A)$.

(証明) $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

定理 14

$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ が解をもつ $\Leftrightarrow \mathbb{b} \in C(A)$.

(証明) $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

定理 14

$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ が解をもつ $\Leftrightarrow \mathbb{b} \in C(A)$.

(証明) $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

よって，$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ が解をもつ $\Leftrightarrow \mathbb{b} \in C(A)$. $\square$

定理 14

$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ が解をもつ $\Leftrightarrow \mathbb{b} \in C(A)$.

(証明) $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

よって，$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ が解をもつ $\Leftrightarrow \mathbb{b} \in C(A)$. □

- 教 pp.196〜198 の練習問題 4.6 を各自やってみる