

# はじめに (線形代数 IIA)

線形代数 II = 線形代数 I のつづき

教科書 「やさしい線形代数, H. アントン著, 山下純一訳」 現代数学社

講義の情報 <http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス [LINK](#)

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと.  
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

## 4.7 内積空間

### 定義 (内積, 内積空間)

$V$  : 線形空間. (一般には,  $V \neq \mathbb{R}^n$  に注意)

$u, v \in V$  に次をみたす  $\langle u, v \rangle \in \mathbb{R}$  を対応させる写像を  $V$  上の 内積 という:

- (1)  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$  ;
- (2)  $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$  ;
- (3)  $\langle k u, v \rangle = k \langle u, v \rangle$  ( $k \in \mathbb{R}$ ) ;
- (4)  $\langle v, v \rangle \geq 0$ . 等号成立  $\Leftrightarrow v = \mathbf{0}$ .

内積をもった (定義された) 線形空間  $V$  を 内積空間 という.

### 注意

(1)~(4) より, 内積は以下をみたす : (各自確認する)

- (i)  $\langle \mathbf{0}, v \rangle = \langle v, \mathbf{0} \rangle = 0$ ;
- (ii)  $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$ ;
- (iii)  $\langle u, k v \rangle = k \langle u, v \rangle$ .

## 例

(1)  $V = \mathbb{R}^n$ ,  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$ . (ユークリッド内積)

(2)  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ .

(3)  $V = M_{2,2} \ni A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ ,  
 $\langle A, B \rangle := a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$ .

(4)  $V = \mathbb{R}[X]_2 \ni \mathbf{p} = a_0 + a_1X + a_2X^2, \mathbf{q} = b_0 + b_1X + b_2X^2$ ,  
 $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle := a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$ .

(5)  $V = \mathbb{R}[X]_n \ni p(x), q(x), \langle p(x), q(x) \rangle := \int_b^a p(x)q(x)dx$ .

## 定理 15 (コーシー・シュワルツの不等式)

$V$  : 内積空間.  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  に対して,  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ .

(証明)  $t \in \mathbb{R}$ .  $0 \leq \langle t\mathbf{u} + \mathbf{v}, t\mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle t^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle t + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle =$   
 $\text{red} t^2 + \text{blue} t + c$  より,  $b^2 - 4ac \leq 0$ .  $\therefore \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ . □

## 例

$V = \mathbb{R}^n$ ,  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$ . (ユークリッド内積)

$(u_1v_1 + \cdots + u_nv_n)^2 \leq (u_1^2 + \cdots + u_n^2)(v_1^2 + \cdots + v_n^2)$  : コーシーの不等式

## 4.8 内積空間における「長さ」「角」

### 定義 (ノルム, 距離)

$V$  : 内積空間.

$\mathbf{u} \in V$  の ノルム  $\|\mathbf{u}\| := \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{\frac{1}{2}}$

$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  の間の 距離  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ . (距離  $\cdots$  distance)

### 注意

内積空間  $V$  に与えられた **内積**  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  ごとに **ノルム** と **距離** が定まる.

### 例

$V = \mathbb{R}^n$ ,  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$  : ユークリッド内積.

$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}$  : ユークリッドノルム.

$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$  : ユークリッド距離.

## 定理 16

長さ

- (1)  $\|\mathbf{u}\| \geq 0$ ;
- (2)  $\|\mathbf{u}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$ ;
- (3)  $\|k \mathbf{u}\| = |k| \cdot \|\mathbf{u}\|$ ;
- (4)  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ ;

距離

- $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$ ;
- $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$ ;
- $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ ;
- $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ .

(証明) 略. (教 pp.206~207) (特に, (4) は 3 角不等式 とよばれる)

コーシー・シュワルツの不等式より,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2. \text{ よって, } \left( \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} \right)^2 \leq 1.$$

$$\therefore -1 \leq \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} \leq 1 \text{ より, } \cos \theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} \quad (0 \leq \exists \theta \leq \pi).$$

▶ この  $\theta$  を  $\mathbf{u}$  と  $\mathbf{v}$  のなす角 という

## 定義 (直交)

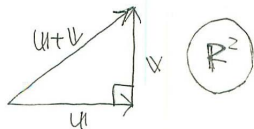
$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \text{ が } \underline{\text{直交}} \stackrel{\text{def}}{\iff} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad (\iff \theta = \frac{\pi}{2}).$$

## 定理 17 (一般化されたピタゴラスの定理)

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0 \Rightarrow \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2.$$

$$\begin{aligned} \text{(証明)} \quad \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2 \cdot 0 + \|\mathbf{v}\|^2. \end{aligned}$$

□



## 4.9 直交基底 ; グラム・シュミットの方法

### 定義 (直交集合, 正規直交集合)

$V$  : 内積空間. (内積  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  が定義された線形空間)

$S \subset V$  : 直交集合  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0 \ (\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in S, \mathbf{u} \neq \mathbf{v})$

$S \subset V$  : 正規直交集合  $\stackrel{\text{def}}{\iff} S$  は直交集合かつ  $\|\mathbf{u}\| = 1 \ (\forall \mathbf{u} \in S)$ .

▶ “正規”  $\leftrightarrow \|\mathbf{u}\| = 1 \leftrightarrow$  “ノルム = 1”

### 例

$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), \mathbf{v}_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \in \mathbb{R}^3$ .

$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \subset \mathbb{R}^3$  は正規直交集合.

$\because \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = 0$  かつ  $\|\mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_2\| = \|\mathbf{v}_3\| = 1$ .

### 例

$\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V$  に対して,  $\mathbf{v}' := \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$  とすれば,  $\|\mathbf{v}'\| = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \|\mathbf{v}\| = 1$ .

▶  $\mathbf{v}$  から “ノルム = 1” の  $\mathbf{v}'$  を作ることを 正規化 という