はじめに　(線形代数 IIA)

$\boxed{\text{線形代数 II} \quad = \quad \text{線形代数 I のつづき}}$

教科書　「やさしい線形代数，H．アントン著，山下純一訳」現代数学社

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと．
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 $\longrightarrow$ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

定理 18

V : 内積空間,

定理 18

V : 内積空間，($\cdots$ 内積空間とは内積が定義された線形空間のことだった)

定理 18

V : 内積空間, ($\cdots$ 内積空間とは内積が定義された線形空間のことだった)
$S = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\}$: V の正規直交基底 (正規直交集合かつ基底).
$\forall \mathbb{u} \in V$ に対して, $\mathbb{u} = \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 + \cdots + \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n$.

定理 18

V : 内積空間,(⋯ 内積空間とは内積が定義された線形空間のことだった)
$S = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\}$: V の正規直交基底 (正規直交集合かつ基底).
$\forall \mathbb{u} \in V$ に対して, $\mathbb{u} = \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 + \cdots + \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n$.

(証明) $\mathbb{u} = k_1 \mathbb{v}_1 + \cdots + k_n \mathbb{v}_n \Rightarrow k_i = \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle$ $(i = 1, \ldots, n)$ を示す.

定理 18

V : 内積空間，(⋯ 内積空間とは内積が定義された線形空間のことだった)
$S = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\}$: V の正規直交基底 (正規直交集合かつ基底).
$\forall \mathbb{u} \in V$ に対して，$\mathbb{u} = \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 + \cdots + \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n$.

(証明) $\mathbb{u} = k_1 \mathbb{v}_1 + \cdots + k_n \mathbb{v}_n \Rightarrow k_i = \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle$ $(i = 1, \ldots, n)$ を示す.
$\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle = \langle k_1 \mathbb{v}_1 + \cdots + k_n \mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i \rangle$

定理 18

V : 内積空間, ($\cdots$ 内積空間とは内積が定義された線形空間のことだった)
$S = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\}$: V の正規直交基底 (正規直交集合かつ基底).
$\forall \mathbb{u} \in V$ に対して, $\mathbb{u} = \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 + \cdots + \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n$.

(証明) $\mathbb{u} = k_1 \mathbb{v}_1 + \cdots + k_n \mathbb{v}_n \Rightarrow k_i = \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle$ $(i = 1, \ldots, n)$ を示す.
$\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle = \langle k_1 \mathbb{v}_1 + \cdots + k_n \mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i \rangle$
$= k_1 \langle \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_i \rangle + \cdots + k_i \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i \rangle + \cdots + k_n \langle \mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i \rangle$

定理 18

V : 内積空間，(⋯ 内積空間とは内積が定義された線形空間のことだった)
$S = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\}$: V の正規直交基底 (正規直交集合かつ基底).
$\forall \mathbb{u} \in V$ に対して， $\mathbb{u} = \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 + \cdots + \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n$.

(証明) $\mathbb{u} = k_1 \mathbb{v}_1 + \cdots + k_n \mathbb{v}_n \Rightarrow k_i = \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle$ $(i = 1, \ldots, n)$ を示す.
$\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle = \langle k_1 \mathbb{v}_1 + \cdots + k_n \mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i \rangle$
$= k_1 \langle \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_i \rangle + \cdots + k_i \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i \rangle + \cdots + k_n \langle \mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i \rangle$
$= k_1 \cdot 0 + \cdots + k_i \cdot 1 + \cdots + k_n \cdot 0 = k_i$.

定理 18

V : 内積空間, (⋯ 内積空間とは内積が定義された線形空間のことだった)
$S = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\}$: V の正規直交基底 (正規直交集合かつ基底).
$\forall \mathbb{u} \in V$ に対して, $\mathbb{u} = \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 + \cdots + \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n$.

(証明) $\mathbb{u} = k_1 \mathbb{v}_1 + \cdots + k_n \mathbb{v}_n \Rightarrow k_i = \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle$ $(i = 1, \ldots, n)$ を示す.
$\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle = \langle k_1 \mathbb{v}_1 + \cdots + k_n \mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i \rangle$
$= k_1 \langle \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_i \rangle + \cdots + k_i \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i \rangle + \cdots + k_n \langle \mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i \rangle$
$= k_1 \cdot 0 + \cdots + k_i \cdot 1 + \cdots + k_n \cdot 0 = k_i$.
$(\because \langle \mathbb{v}_j, \mathbb{v}_i \rangle = 0$ $(i \neq j)$, $\langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i \rangle = ||\mathbb{v}_i||^2 = 1)$ □

定理 18

V : 内積空間, ($\cdots$ 内積空間とは内積が定義された線形空間のことだった)
$S = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\}$: V の正規直交基底 (正規直交集合かつ基底).
$\forall \mathbb{u} \in V$ に対して, $\mathbb{u} = \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 + \cdots + \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n$.

(証明) $\mathbb{u} = k_1 \mathbb{v}_1 + \cdots + k_n \mathbb{v}_n \Rightarrow k_i = \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle$ $(i = 1, \ldots, n)$ を示す.

$\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle = \langle k_1 \mathbb{v}_1 + \cdots + k_n \mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i \rangle$
$= k_1 \langle \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_i \rangle + \cdots + k_i \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i \rangle + \cdots + k_n \langle \mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i \rangle$
$= k_1 \cdot 0 + \cdots + k_i \cdot 1 + \cdots + k_n \cdot 0 = k_i$.
$(\because \langle \mathbb{v}_j, \mathbb{v}_i \rangle = 0 \ (i \neq j), \ \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i \rangle = ||\mathbb{v}_i||^2 = 1)$ $\square$

- 内積 $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle, \ldots, \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle$ を求めるだけで, 1 次結合の係数がわかる！

定理 18

V : 内積空間, (⋯ 内積空間とは内積が定義された線形空間のことだった)
$S = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\}$: V の正規直交基底 (正規直交集合かつ基底).
$\forall \mathbb{u} \in V$ に対して, $\mathbb{u} = \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 + \cdots + \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n$.

(証明) $\mathbb{u} = k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n \Rightarrow k_i = \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle$ $(i = 1, \ldots, n)$ を示す.
$\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle = \langle k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i \rangle$
$= k_1\langle \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_i \rangle + \cdots + k_i\langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i \rangle + \cdots + k_n\langle \mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i \rangle$
$= k_1 \cdot 0 + \cdots + k_i \cdot 1 + \cdots + k_n \cdot 0 = k_i$.
$(\because \langle \mathbb{v}_j, \mathbb{v}_i \rangle = 0\ (i \neq j),\ \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i \rangle = ||\mathbb{v}_i||^2 = 1)$ □

- 内積 $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle, \ldots, \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle$ を求めるだけで, 1 次結合の係数がわかる!

例

$\mathbb{v}_1 = (0, 1, 0), \mathbb{v}_2 = (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}), \mathbb{v}_3 = (\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}) \in \mathbb{R}^3$.

定理 18

V：内積空間，(… 内積空間とは内積が定義された線形空間のことだった)
$S = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\}$: V の正規直交基底 (正規直交集合かつ基底).
$\forall \mathbb{u} \in V$ に対して，$\mathbb{u} = \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 + \cdots + \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n$.

(証明) $\mathbb{u} = k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n \Rightarrow k_i = \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle$ $(i = 1, \ldots, n)$ を示す.
$\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle = \langle k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i \rangle$
$= k_1\langle \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_i \rangle + \cdots + k_i\langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i \rangle + \cdots + k_n\langle \mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i \rangle$
$= k_1 \cdot 0 + \cdots + k_i \cdot 1 + \cdots + k_n \cdot 0 = k_i$.
$(\because \langle \mathbb{v}_j, \mathbb{v}_i \rangle = 0\ (i \neq j),\ \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i \rangle = ||\mathbb{v}_i||^2 = 1)$ □

- 内積 $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle, \ldots, \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle$ を求めるだけで，1 次結合の係数がわかる！

例

$\mathbb{v}_1 = (0, 1, 0), \mathbb{v}_2 = (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}), \mathbb{v}_3 = (\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}) \in \mathbb{R}^3$.
$S = \{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底. (各自確認する)

定理 18

V：内積空間，（$\cdots$ 内積空間とは内積が定義された線形空間のことだった）
$S = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\}$: V の正規直交基底 (正規直交集合かつ基底).
$\forall \mathbb{u} \in V$ に対して，$\mathbb{u} = \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 + \cdots + \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n$.

(証明) $\mathbb{u} = k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n \Rightarrow k_i = \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle$ $(i = 1, \ldots, n)$ を示す.
$\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle = \langle k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i \rangle$
$= k_1\langle \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_i \rangle + \cdots + k_i\langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i \rangle + \cdots + k_n\langle \mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i \rangle$
$= k_1 \cdot 0 + \cdots + k_i \cdot 1 + \cdots + k_n \cdot 0 = k_i$.
$(\because \langle \mathbb{v}_j, \mathbb{v}_i \rangle = 0 \ (i \neq j), \ \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i \rangle = ||\mathbb{v}_i||^2 = 1)$ □

- 内積 $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle, \ldots, \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle$ を求めるだけで，1 次結合の係数がわかる！

例

$\mathbb{v}_1 = (0, 1, 0), \mathbb{v}_2 = (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}), \mathbb{v}_3 = (\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}) \in \mathbb{R}^3$.
$S = \{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底. (各自確認する)
$\mathbb{u} = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ は，$\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle = 1$, $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_2 \rangle = -\frac{1}{5}$, $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_3 \rangle = \frac{7}{5}$ より，

定理 18

V : 内積空間, ($\cdots$ 内積空間とは内積が定義された線形空間のことだった)
$S = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\}$: V の正規直交基底 (正規直交集合かつ基底).
$\forall \mathbb{u} \in V$ に対して, $\mathbb{u} = \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 + \cdots + \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n$.

(証明) $\mathbb{u} = k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n \Rightarrow k_i = \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle$ $(i = 1, \ldots, n)$ を示す.
$\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle = \langle k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i \rangle$
$= k_1\langle \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_i \rangle + \cdots + k_i\langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i \rangle + \cdots + k_n\langle \mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i \rangle$
$= k_1 \cdot 0 + \cdots + k_i \cdot 1 + \cdots + k_n \cdot 0 = k_i$.
($\because$ $\langle \mathbb{v}_j, \mathbb{v}_i \rangle = 0$ $(i \neq j)$, $\langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i \rangle = ||\mathbb{v}_i||^2 = 1$) $\square$

- 内積 $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle, \ldots, \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle$ を求めるだけで, 1 次結合の係数がわかる!

例

$\mathbb{v}_1 = (0, 1, 0), \mathbb{v}_2 = (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}), \mathbb{v}_3 = (\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}) \in \mathbb{R}^3$.
$S = \{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底. (各自確認する)
$\mathbb{u} = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ は, $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle = 1$, $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_2 \rangle = -\frac{1}{5}$, $\langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_3 \rangle = \frac{7}{5}$ より,
$\mathbb{u} = 1 \cdot \mathbb{v}_1 - \frac{1}{5} \cdot \mathbb{v}_2 + \frac{7}{5} \cdot \mathbb{v}_3$.

定理 19

V：内積空間．$S = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} \subset V$ $(\mathbb{v}_i \neq \mathbb{o})$：直交集合
$\Rightarrow \mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ は 1 次独立．

定理 19

V：内積空間．$S = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} \subset V$ $(\mathbb{v}_i \neq \mathbb{o})$：直交集合
$\Rightarrow \mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ は 1 次独立.

(証明) $k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n = \mathbb{o} \Rightarrow k_i = 0$ を示す.

定理 19

V：内積空間．$S = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} \subset V$ $(\mathbb{v}_i \neq \mathbb{o})$：直交集合
$\Rightarrow \mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ は 1 次独立.

(証明) $k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n = \mathbb{o} \Rightarrow k_i = 0$ を示す.
$k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n = \mathbb{o} \Rightarrow \langle k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i\rangle = \langle \mathbb{o}, \mathbb{v}_i\rangle = 0$

定理 19

V：内積空間．$S = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} \subset V$ $(\mathbb{v}_i \neq \mathbb{o})$：直交集合
$\Rightarrow \mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ は 1 次独立.

(証明) $k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n = \mathbb{o} \Rightarrow k_i = 0$ を示す.

$k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n = \mathbb{o} \Rightarrow \langle k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i\rangle = \langle \mathbb{o}, \mathbb{v}_i\rangle = 0$

$\Rightarrow k_1\langle \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_i\rangle + \cdots + k_i\langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i\rangle + \cdots + k_n\langle \mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i\rangle = 0$

定理 19

V：内積空間．$S = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} \subset V$ $(\mathbb{v}_i \neq \mathbb{o})$：直交集合
$\Rightarrow \mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ は 1 次独立.

(証明) $k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n = \mathbb{o} \Rightarrow k_i = 0$ を示す.

$k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n = \mathbb{o} \Rightarrow \langle k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i\rangle = \langle \mathbb{o}, \mathbb{v}_i\rangle = 0$

$\Rightarrow k_1\langle \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_i\rangle + \cdots + k_i\langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i\rangle + \cdots + k_n\langle \mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i\rangle = 0$

$\Rightarrow k_1 \cdot 0 + \cdots + k_i\langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i\rangle + \cdots + k_n \cdot 0 = 0 \Rightarrow k_i\langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i\rangle = 0$

定理 19

V：内積空間．$S = \{\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n\} \subset V$ $(\mathbb{v}_i \neq \mathbb{o})$：直交集合
$\Rightarrow \mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n$ は 1 次独立.

(証明) $k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n = \mathbb{o} \Rightarrow k_i = 0$ を示す.

$k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n = \mathbb{o} \Rightarrow \langle k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i\rangle = \langle \mathbb{o}, \mathbb{v}_i\rangle = 0$

$\Rightarrow k_1\langle \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_i\rangle + \cdots + k_i\langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i\rangle + \cdots + k_n\langle \mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i\rangle = 0$

$\Rightarrow k_1 \cdot 0 + \cdots + k_i\langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i\rangle + \cdots + k_n \cdot 0 = 0 \Rightarrow k_i\langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i\rangle = 0 \Rightarrow k_i = 0.$

$(\because\ \mathbb{v}_i \neq \mathbb{o}$ より $\langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i\rangle = ||\mathbb{v}_i||^2 \neq 0)$ □

定理 19

V : 内積空間. $S = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} \subset V$ $(\mathbb{v}_i \neq \mathbb{o})$: 直交集合
$\Rightarrow \mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ は 1 次独立.

(証明) $k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n = \mathbb{o} \Rightarrow k_i = 0$ を示す.

$k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n = \mathbb{o} \Rightarrow \langle k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i\rangle = \langle \mathbb{o}, \mathbb{v}_i\rangle = 0$

$\Rightarrow k_1\langle \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_i\rangle + \cdots + k_i\langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i\rangle + \cdots + k_n\langle \mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i\rangle = 0$

$\Rightarrow k_1 \cdot 0 + \cdots + k_i\langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i\rangle + \cdots + k_n \cdot 0 = 0 \Rightarrow k_i\langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i\rangle = 0 \Rightarrow k_i = 0.$

$(\because\ \mathbb{v}_i \neq \mathbb{o}$ より $\langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i\rangle = ||\mathbb{v}_i||^2 \neq 0)$ □

例

$\mathbb{v}_1 = (0, 1, 0), \mathbb{v}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), \mathbb{v}_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \in \mathbb{R}^3.$

定理 19

V：内積空間．$S = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} \subset V$ $(\mathbb{v}_i \neq \mathbb{o})$：直交集合
$\Rightarrow \mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ は 1 次独立．

(証明) $k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n = \mathbb{o} \Rightarrow k_i = 0$ を示す．
$k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n = \mathbb{o} \Rightarrow \langle k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i\rangle = \langle \mathbb{o}, \mathbb{v}_i\rangle = 0$
$\Rightarrow k_1\langle\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_i\rangle + \cdots + k_i\langle\mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i\rangle + \cdots + k_n\langle\mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i\rangle = 0$
$\Rightarrow k_1 \cdot 0 + \cdots + k_i\langle\mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i\rangle + \cdots + k_n \cdot 0 = 0 \Rightarrow k_i\langle\mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i\rangle = 0 \Rightarrow k_i = 0.$
$(\because\ \mathbb{v}_i \neq \mathbb{o}$ より $\langle\mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i\rangle = ||\mathbb{v}_i||^2 \neq 0)$ $\square$

例

$\mathbb{v}_1 = (0, 1, 0), \mathbb{v}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), \mathbb{v}_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \in \mathbb{R}^3.$
$S = \{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ は正規直交集合．(前回)

定理 19

V：内積空間．$S = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} \subset V$ $(\mathbb{v}_i \neq \mathbb{o})$：直交集合
$\Rightarrow \mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ は 1 次独立.

(証明) $k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n = \mathbb{o} \Rightarrow k_i = 0$ を示す.
$k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n = \mathbb{o} \Rightarrow \langle k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i\rangle = \langle \mathbb{o}, \mathbb{v}_i\rangle = 0$
$\Rightarrow k_1\langle\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_i\rangle + \cdots + k_i\langle\mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i\rangle + \cdots + k_n\langle\mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i\rangle = 0$
$\Rightarrow k_1 \cdot 0 + \cdots + k_i\langle\mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i\rangle + \cdots + k_n \cdot 0 = 0 \Rightarrow k_i\langle\mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i\rangle = 0 \Rightarrow k_i = 0.$
$(\because\ \mathbb{v}_i \neq \mathbb{o}$ より $\langle\mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i\rangle = ||\mathbb{v}_i||^2 \neq 0)$ □

例

$\mathbb{v}_1 = (0, 1, 0), \mathbb{v}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), \mathbb{v}_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \in \mathbb{R}^3.$
$S = \{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ は正規直交集合．(前回)
定理 19 より，$\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3$ は 1 次独立.

定理 19

V : 内積空間. $S = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} \subset V$ $(\mathbb{v}_i \neq \mathbb{o})$: 直交集合
$\Rightarrow \mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ は 1 次独立.

(証明) $k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n = \mathbb{o} \Rightarrow k_i = 0$ を示す.
$k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n = \mathbb{o} \Rightarrow \langle k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i\rangle = \langle \mathbb{o}, \mathbb{v}_i\rangle = 0$
$\Rightarrow k_1\langle\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_i\rangle + \cdots + k_i\langle\mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i\rangle + \cdots + k_n\langle\mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i\rangle = 0$
$\Rightarrow k_1 \cdot 0 + \cdots + k_i\langle\mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i\rangle + \cdots + k_n \cdot 0 = 0 \Rightarrow k_i\langle\mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i\rangle = 0 \Rightarrow k_i = 0.$
$(\because\ \mathbb{v}_i \neq \mathbb{o}$ より $\langle\mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i\rangle = ||\mathbb{v}_i||^2 \neq 0)$ $\square$

例

$\mathbb{v}_1 = (0, 1, 0), \mathbb{v}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), \mathbb{v}_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \in \mathbb{R}^3$.
$S = \{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ は正規直交集合. (前回)
定理 19 より, $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3$ は 1 次独立.
よって, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ と定理 9 より, S は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底.

定理 20

V：内積空間，$S = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} \subset V$：正規直交集合．
$W = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} \Rightarrow \forall \mathbb{u} \in V$ は $\mathbb{u} = \mathbb{w}_1 + \mathbb{w}_2$
$\mathbb{w}_1 := \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 + \cdots + \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n \in W$
$\mathbb{w}_2 := \mathbb{u} - \mathbb{w}_1 = \mathbb{u} - \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \cdots - \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n \in W^{\perp}$
とかける．但し，$W^{\perp} := \{\mathbb{v} \in V \mid \langle \mathbb{v}, \mathbb{w} \rangle = 0 \ (\forall \mathbb{w} \in W)\}$.

定理 20

V：内積空間，$S = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} \subset V$：正規直交集合.
$W = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} \Rightarrow \forall \mathbb{u} \in V$ は $\mathbb{u} = \mathbb{w}_1 + \mathbb{w}_2$
$\mathbb{w}_1 := \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 + \cdots + \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n \in W$
$\mathbb{w}_2 := \mathbb{u} - \mathbb{w}_1 = \mathbb{u} - \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \cdots - \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n \in W^\perp$
とかける．但し，$W^\perp := \{\mathbb{v} \in V \mid \langle \mathbb{v}, \mathbb{w} \rangle = 0 \ (\forall \mathbb{w} \in W)\}$.

(証明) $\mathbb{w}_2 \in W^\perp$ を示せばよい.

定理 20

V：内積空間，$S = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} \subset V$：正規直交集合．
$W = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} \Rightarrow \forall \mathbb{u} \in V$ は $\mathbb{u} = \mathbb{w}_1 + \mathbb{w}_2$
$\mathbb{w}_1 := \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 + \cdots + \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n \in W$
$\mathbb{w}_2 := \mathbb{u} - \mathbb{w}_1 = \mathbb{u} - \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \cdots - \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n \in W^{\perp}$
とかける．但し，$W^{\perp} := \{\mathbb{v} \in V \mid \langle \mathbb{v}, \mathbb{w} \rangle = 0 \ (\forall \mathbb{w} \in W)\}$.

(証明) $\mathbb{w}_2 \in W^{\perp}$ を示せばよい．$W = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\}$ より，
$\langle \mathbb{w}_2, \mathbb{v}_i \rangle = 0 \ (i = 1, \ldots, n)$ を示せばよい．(定理 19 から S は W の基底)

定理 20

V：内積空間，$S=\{\mathbb{v}_1,\ldots,\mathbb{v}_n\}\subset V$：正規直交集合．
$W=\mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1,\ldots,\mathbb{v}_n\}\Rightarrow \forall\mathbb{u}\in V$ は $\mathbb{u}=\mathbb{w}_1+\mathbb{w}_2$
$\mathbb{w}_1:=\langle\mathbb{u},\mathbb{v}_1\rangle\mathbb{v}_1+\cdots+\langle\mathbb{u},\mathbb{v}_n\rangle\mathbb{v}_n\in W$
$\mathbb{w}_2:=\mathbb{u}-\mathbb{w}_1=\mathbb{u}-\langle\mathbb{u},\mathbb{v}_1\rangle\mathbb{v}_1-\cdots-\langle\mathbb{u},\mathbb{v}_n\rangle\mathbb{v}_n\in W^{\perp}$
とかける．但し，$W^{\perp}:=\{\mathbb{v}\in V\mid\langle\mathbb{v},\mathbb{w}\rangle=0\ (\forall\mathbb{w}\in W)\}$.

(証明) $\mathbb{w}_2\in W^{\perp}$ を示せばよい．$W=\mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1,\ldots,\mathbb{v}_n\}$ より，
$\langle\mathbb{w}_2,\mathbb{v}_i\rangle=0\ (i=1,\ldots,n)$ を示せばよい．(定理 19 から S は W の基底)
$\langle\mathbb{w}_2,\mathbb{v}_i\rangle=\langle\mathbb{u}-\mathbb{w}_1,\mathbb{v}_i\rangle=\langle\mathbb{u},\mathbb{v}_i\rangle-\langle\mathbb{w}_1,\mathbb{v}_i\rangle$

定理 20

V：内積空間，$S = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} \subset V$：正規直交集合．
$W = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} \Rightarrow \forall \mathbb{u} \in V$ は $\mathbb{u} = \mathbb{w}_1 + \mathbb{w}_2$
$\mathbb{w}_1 := \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 + \cdots + \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n \in W$
$\mathbb{w}_2 := \mathbb{u} - \mathbb{w}_1 = \mathbb{u} - \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \cdots - \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n \in W^\perp$
とかける．但し，$W^\perp := \{\mathbb{v} \in V \mid \langle \mathbb{v}, \mathbb{w} \rangle = 0 \ (\forall \mathbb{w} \in W)\}$.

(証明) $\mathbb{w}_2 \in W^\perp$ を示せばよい．$W = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\}$ より，
$\langle \mathbb{w}_2, \mathbb{v}_i \rangle = 0 \ (i = 1, \ldots, n)$ を示せばよい．(定理 19 から S は W の基底)
$\langle \mathbb{w}_2, \mathbb{v}_i \rangle = \langle \mathbb{u} - \mathbb{w}_1, \mathbb{v}_i \rangle = \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle - \langle \mathbb{w}_1, \mathbb{v}_i \rangle$
$= \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle - \langle \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 + \cdots + \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle \mathbb{v}_i + \cdots + \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i \rangle$

定理 20

V：内積空間，$S = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} \subset V$：正規直交集合．
$W = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} \Rightarrow \forall \mathbb{u} \in V$ は $\mathbb{u} = \mathbb{w}_1 + \mathbb{w}_2$
$\mathbb{w}_1 := \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 + \cdots + \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n \in W$
$\mathbb{w}_2 := \mathbb{u} - \mathbb{w}_1 = \mathbb{u} - \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \cdots - \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n \in W^{\perp}$
とかける．但し，$W^{\perp} := \{\mathbb{v} \in V \mid \langle \mathbb{v}, \mathbb{w} \rangle = 0 \ (\forall \mathbb{w} \in W)\}$.

(証明) $\mathbb{w}_2 \in W^{\perp}$ を示せばよい．$W = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\}$ より，
$\langle \mathbb{w}_2, \mathbb{v}_i \rangle = 0 \ (i = 1, \ldots, n)$ を示せばよい．(定理 19 から S は W の基底)
$\langle \mathbb{w}_2, \mathbb{v}_i \rangle = \langle \mathbb{u} - \mathbb{w}_1, \mathbb{v}_i \rangle = \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle - \langle \mathbb{w}_1, \mathbb{v}_i \rangle$
$= \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle - \langle \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 + \cdots + \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle \mathbb{v}_i + \cdots + \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i \rangle$
$= \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle - \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \langle \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_i \rangle - \cdots - \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i \rangle - \cdots - \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \langle \mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i \rangle$

定理 20

V：内積空間，$S = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} \subset V$：正規直交集合．
$W = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} \Rightarrow \forall \mathbb{u} \in V$ は $\mathbb{u} = \mathbb{w}_1 + \mathbb{w}_2$
$\mathbb{w}_1 := \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 + \cdots + \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n \in W$
$\mathbb{w}_2 := \mathbb{u} - \mathbb{w}_1 = \mathbb{u} - \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \cdots - \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n \in W^\perp$
とかける．但し，$W^\perp := \{\mathbb{v} \in V \mid \langle \mathbb{v}, \mathbb{w} \rangle = 0 \ (\forall \mathbb{w} \in W)\}$.

(証明) $\mathbb{w}_2 \in W^\perp$ を示せばよい．$W = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\}$ より，
$\langle \mathbb{w}_2, \mathbb{v}_i \rangle = 0 \ (i = 1, \ldots, n)$ を示せばよい．(定理 19 から S は W の基底)
$\langle \mathbb{w}_2, \mathbb{v}_i \rangle = \langle \mathbb{u} - \mathbb{w}_1, \mathbb{v}_i \rangle = \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle - \langle \mathbb{w}_1, \mathbb{v}_i \rangle$
$= \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle - \langle \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 + \cdots + \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle \mathbb{v}_i + \cdots + \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i \rangle$
$= \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle - \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \langle \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_i \rangle - \cdots - \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i \rangle - \cdots - \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \langle \mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i \rangle$
$= \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle - \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \cdot 0 - \cdots - \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle \cdot 1 - \cdots - \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \cdot 0 = 0.$

定理 20

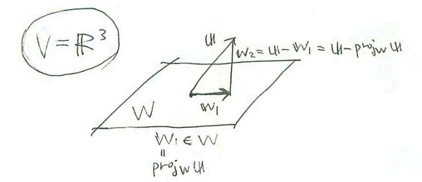
V：内積空間，$S = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} \subset V$：正規直交集合．
$W = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} \Rightarrow \forall \mathbb{u} \in V$ は $\mathbb{u} = \mathbb{w}_1 + \mathbb{w}_2$
$\mathbb{w}_1 := \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 + \cdots + \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n \in W$
$\mathbb{w}_2 := \mathbb{u} - \mathbb{w}_1 = \mathbb{u} - \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \cdots - \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n \in W^\perp$
とかける．但し，$W^\perp := \{\mathbb{v} \in V \mid \langle \mathbb{v}, \mathbb{w} \rangle = 0 \ (\forall \mathbb{w} \in W)\}$.

(証明) $\mathbb{w}_2 \in W^\perp$ を示せばよい．$W = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\}$ より，
$\langle \mathbb{w}_2, \mathbb{v}_i \rangle = 0 \ (i = 1, \ldots, n)$ を示せばよい．(定理 19 から S は W の基底)
$\langle \mathbb{w}_2, \mathbb{v}_i \rangle = \langle \mathbb{u} - \mathbb{w}_1, \mathbb{v}_i \rangle = \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle - \langle \mathbb{w}_1, \mathbb{v}_i \rangle$
$= \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle - \langle \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 + \cdots + \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle \mathbb{v}_i + \cdots + \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i \rangle$
$= \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle - \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \langle \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_i \rangle - \cdots - \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i \rangle - \cdots - \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \langle \mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i \rangle$
$= \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle - \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \cdot 0 - \cdots - \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_i \rangle \cdot 1 - \cdots - \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \cdot 0 = 0.$
$(\because \ \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_j \rangle = 0 \ (i \neq j), \ \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i \rangle = ||\mathbb{v}_i||^2 = 1)$ □

定理 20

V：内積空間，$S = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} \subset V$：正規直交集合.
$W = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} \Rightarrow \forall \mathbb{u} \in V$ は $\mathbb{u} = \mathbb{w}_1 + \mathbb{w}_2$
$\mathbb{w}_1 := \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 + \cdots + \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n \in W$
$\mathbb{w}_2 := \mathbb{u} - \mathbb{w}_1 = \mathbb{u} - \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \cdots - \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n \in W^{\perp}$
とかける．但し，$W^{\perp} := \{\mathbb{v} \in V \mid \langle \mathbb{v}, \mathbb{w} \rangle = 0 \ (\forall \mathbb{w} \in W)\}$.

注意と定義



$\mathbb{w}_1 := \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 + \cdots + \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n \in W$ を $\mathbb{u}$ の W への正射影 といい，$\mathrm{proj}_W\, \mathbb{u}$ とかく．
$\mathbb{w}_2 := \mathbb{u} - \mathbb{w}_1 = \mathbb{u} - \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \cdots - \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n = \mathbb{u} - \mathrm{proj}_W\, \mathbb{u} \in W^{\perp}$
を $\mathbb{u}$ の W に関する直交成分 という．

例

$W = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2\} \subset \mathbb{R}^3$
$\mathbb{v}_1 = (0, 1, 0), \mathbb{v}_2 = (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}), \mathbb{u} = (1, 1, 1)$ とすれば,

例

$W = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2\} \subset \mathbb{R}^3$

$\mathbb{v}_1 = (0, 1, 0), \mathbb{v}_2 = (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}), \mathbb{u} = (1, 1, 1)$ とすれば,

$\mathbb{w}_1 = \mathrm{proj}_W \mathbb{u} = \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 + \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_2 \rangle \mathbb{v}_2$

例

$W = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2\} \subset \mathbb{R}^3$
$\mathbb{v}_1 = (0, 1, 0), \mathbb{v}_2 = (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}), \mathbb{u} = (1, 1, 1)$ とすれば,
$\mathbb{w}_1 = \mathrm{proj}_W \mathbb{u} = \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 + \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_2 \rangle \mathbb{v}_2$
$= 1 \cdot \mathbb{v}_1 + (-\frac{1}{5})\mathbb{v}_2 = (\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}) \in W$: $\mathbb{u}$ の W への正射影.

例

$W = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2\} \subset \mathbb{R}^3$

$\mathbb{v}_1 = (0,1,0), \mathbb{v}_2 = (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}), \mathbb{u} = (1,1,1)$ とすれば,

$\mathbb{w}_1 = \mathrm{proj}_W \mathbb{u} = \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 + \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_2 \rangle \mathbb{v}_2$

$= 1 \cdot \mathbb{v}_1 + (-\frac{1}{5})\mathbb{v}_2 = (\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}) \in W$: $\mathbb{u}$ の W への正射影.

$\mathbb{w}_2 = \mathbb{u} - \mathbb{w}_1 = \mathbb{u} - \mathrm{proj}_W \mathbb{u}$

例

$W = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2\} \subset \mathbb{R}^3$

$\mathbb{v}_1 = (0,1,0), \mathbb{v}_2 = (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}), \mathbb{u} = (1,1,1)$ とすれば,

$\mathbb{w}_1 = \mathrm{proj}_W\, \mathbb{u} = \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 + \langle \mathbb{u}, \mathbb{v}_2 \rangle \mathbb{v}_2$

$= 1 \cdot \mathbb{v}_1 + (-\frac{1}{5})\mathbb{v}_2 = (\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}) \in W$: $\mathbb{u}$ の W への正射影.

$\mathbb{w}_2 = \mathbb{u} - \mathbb{w}_1 = \mathbb{u} - \mathrm{proj}_W\, \mathbb{u}$

$= (1,1,1) - (\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}) = (\frac{21}{25}, 0, \frac{28}{25}) \in W^{\perp}$: $\mathbb{u}$ の W に関する直交成分

定理 21 (グラム・シュミットの正規直交化法)

有限次元内積空間 $V \neq \{\mathbf{0}\}$ は正規直交基底をもつ.

定理 21 (グラム・シュミットの正規直交化法)

有限次元内積空間 $V \neq \{\mathbb{o}\}$ は正規直交基底をもつ.

(証明) V：内積空間，$\dim V = n > 0$. V の基底を 1 つとり，$\mathbb{u}_1, \dots, \mathbb{u}_n$ とする．この $\mathbb{u}_1, \dots, \mathbb{u}_n$ から正規直交基底 $\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n$ をつくる.

定理 21 (グラム・シュミットの正規直交化法)

有限次元内積空間 $V \neq \{\mathbb{o}\}$ は正規直交基底をもつ.

(証明) V：内積空間, $\dim V = n > 0$. V の基底を 1 つとり, $\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n$ とする. この $\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n$ から正規直交基底 $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ をつくる.

<u>Step 1.</u> $\mathbb{v}_1 := \frac{\mathbb{u}_1}{||\mathbb{u}_1||}$ $(\Rightarrow ||\mathbb{v}_1|| = 1)$.

定理 21 (グラム・シュミットの正規直交化法)

有限次元内積空間 $V \neq \{\mathbb{o}\}$ は正規直交基底をもつ.

(証明) V : 内積空間, $\dim V = n > 0$. V の基底を 1 つとり, $\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n$ とする. この $\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n$ から正規直交基底 $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ をつくる.

Step 1. $\mathbb{v}_1 := \frac{\mathbb{u}_1}{||\mathbb{u}_1||}$ $(\Rightarrow ||\mathbb{v}_1|| = 1)$.

Step 2. $\mathbb{v}_1$ に直交する $||\mathbb{v}_2|| = 1$ なる $\mathbb{v}_2$ をつくる.

定理 21 (グラム・シュミットの正規直交化法)

有限次元内積空間 $V \neq \{\mathbb{o}\}$ は正規直交基底をもつ.

(証明) V : 内積空間, $\dim V = n > 0$. V の基底を 1 つとり, $\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n$ とする. この $\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n$ から正規直交基底 $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ をつくる.

Step 1. $\mathbb{v}_1 := \frac{\mathbb{u}_1}{||\mathbb{u}_1||}$ $(\Rightarrow ||\mathbb{v}_1|| = 1)$.

Step 2. $\mathbb{v}_1$ に直交する $||\mathbb{v}_2|| = 1$ なる $\mathbb{v}_2$ をつくる. それには, $\mathbb{u}_2$ の $W_1 = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1\}$ に関する直交成分 $\mathbb{u}_2 - \mathbb{w}_1 = \mathbb{u}_2 - \mathrm{proj}_{W_1}\mathbb{u}_2$ を正規化して,

定理 21 (グラム・シュミットの正規直交化法)

有限次元内積空間 $V \neq \{\mathbb{o}\}$ は正規直交基底をもつ.

(証明) V : 内積空間，$\dim V = n > 0$. V の基底を 1 つとり，$\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n$ とする．この $\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n$ から正規直交基底 $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ をつくる.

Step 1. $\mathbb{v}_1 := \frac{\mathbb{u}_1}{||\mathbb{u}_1||}$ $(\Rightarrow ||\mathbb{v}_1|| = 1)$.

Step 2. $\mathbb{v}_1$ に直交する $||\mathbb{v}_2|| = 1$ なる $\mathbb{v}_2$ をつくる．それには，$\mathbb{u}_2$ の $W_1 = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1\}$ に関する直交成分 $\mathbb{u}_2 - \mathbb{w}_1 = \mathbb{u}_2 - \mathrm{proj}_{W_1}\mathbb{u}_2$ を正規化して，$\mathbb{v}_2 := \frac{\mathbb{u}_2 - \mathrm{proj}_{W_1}\mathbb{u}_2}{||\mathbb{u}_2 - \mathrm{proj}_{W_1}\mathbb{u}_2||} = \frac{\mathbb{u}_2 - \langle \mathbb{u}_2, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1}{||\mathbb{u}_2 - \langle \mathbb{u}_2, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1||}$ とすればよい.

定理 21 (グラム・シュミットの正規直交化法)

有限次元内積空間 $V \neq \{\mathbb{o}\}$ は正規直交基底をもつ.

(証明) V：内積空間，$\dim V = n > 0$. V の基底を 1 つとり，$\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n$ とする．この $\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n$ から正規直交基底 $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ をつくる.

Step 1. $\mathbb{v}_1 := \frac{\mathbb{u}_1}{||\mathbb{u}_1||}$ $(\Rightarrow ||\mathbb{v}_1|| = 1)$.

Step 2. $\mathbb{v}_1$ に直交する $||\mathbb{v}_2|| = 1$ なる $\mathbb{v}_2$ をつくる．それには，$\mathbb{u}_2$ の $W_1 = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1\}$ に関する直交成分 $\mathbb{u}_2 - \mathbb{w}_1 = \mathbb{u}_2 - \mathrm{proj}_{W_1}\mathbb{u}_2$ を正規化して，$\mathbb{v}_2 := \frac{\mathbb{u}_2 - \mathrm{proj}_{W_1}\mathbb{u}_2}{||\mathbb{u}_2 - \mathrm{proj}_{W_1}\mathbb{u}_2||} = \frac{\mathbb{u}_2 - \langle \mathbb{u}_2, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1}{||\mathbb{u}_2 - \langle \mathbb{u}_2, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1||}$ とすればよい.

Step 3. $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2$ に直交する $||\mathbb{v}_3|| = 1$ なる $\mathbb{v}_3$ をつくる.

定理 21 (グラム・シュミットの正規直交化法)

有限次元内積空間 $V \neq \{\mathbb{o}\}$ は正規直交基底をもつ.

(証明) V：内積空間, $\dim V = n > 0$. V の基底を 1 つとり, $\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n$ とする. この $\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n$ から正規直交基底 $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ をつくる.

Step 1. $\mathbb{v}_1 := \frac{\mathbb{u}_1}{||\mathbb{u}_1||}$ $(\Rightarrow ||\mathbb{v}_1|| = 1)$.

Step 2. $\mathbb{v}_1$ に直交する $||\mathbb{v}_2|| = 1$ なる $\mathbb{v}_2$ をつくる. それには, $\mathbb{u}_2$ の $W_1 = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1\}$ に関する直交成分 $\mathbb{u}_2 - \mathbb{w}_1 = \mathbb{u}_2 - \mathrm{proj}_{W_1}\mathbb{u}_2$ を正規化して, $\mathbb{v}_2 := \frac{\mathbb{u}_2 - \mathrm{proj}_{W_1}\mathbb{u}_2}{||\mathbb{u}_2 - \mathrm{proj}_{W_1}\mathbb{u}_2||} = \frac{\mathbb{u}_2 - \langle \mathbb{u}_2, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1}{||\mathbb{u}_2 - \langle \mathbb{u}_2, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1||}$ とすればよい.

Step 3. $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2$ に直交する $||\mathbb{v}_3|| = 1$ なる $\mathbb{v}_3$ をつくる. それには, $\mathbb{u}_3$ の $W_2 = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2\}$ に関する直交成分 $\mathbb{u}_3 - \mathbb{w}_1 = \mathbb{u}_3 - \mathrm{proj}_{W_2}\mathbb{u}_3$ を正規化して,

定理 21 (グラム・シュミットの正規直交化法)

有限次元内積空間 $V \neq \{\mathbb{o}\}$ は正規直交基底をもつ.

(証明) V：内積空間，$\dim V = n > 0$. V の基底を 1 つとり，$\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n$ とする．この $\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n$ から正規直交基底 $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ をつくる.

Step 1. $\mathbb{v}_1 := \frac{\mathbb{u}_1}{||\mathbb{u}_1||}$ $(\Rightarrow ||\mathbb{v}_1|| = 1)$.

Step 2. $\mathbb{v}_1$ に直交する $||\mathbb{v}_2|| = 1$ なる $\mathbb{v}_2$ をつくる．それには，$\mathbb{u}_2$ の $W_1 = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1\}$ に関する直交成分 $\mathbb{u}_2 - \mathbb{w}_1 = \mathbb{u}_2 - \mathrm{proj}_{W_1}\mathbb{u}_2$ を正規化して，$\mathbb{v}_2 := \frac{\mathbb{u}_2 - \mathrm{proj}_{W_1}\mathbb{u}_2}{||\mathbb{u}_2 - \mathrm{proj}_{W_1}\mathbb{u}_2||} = \frac{\mathbb{u}_2 - \langle \mathbb{u}_2, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1}{||\mathbb{u}_2 - \langle \mathbb{u}_2, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1||}$ とすればよい.

Step 3. $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2$ に直交する $||\mathbb{v}_3|| = 1$ なる $\mathbb{v}_3$ をつくる．それには，$\mathbb{u}_3$ の $W_2 = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2\}$ に関する直交成分 $\mathbb{u}_3 - \mathbb{w}_1 = \mathbb{u}_3 - \mathrm{proj}_{W_2}\mathbb{u}_3$ を正規化して，$\mathbb{v}_3 := \frac{\mathbb{u}_3 - \mathrm{proj}_{W_2}\mathbb{u}_3}{||\mathbb{u}_3 - \mathrm{proj}_{W_2}\mathbb{u}_3||} = \frac{\mathbb{u}_3 - \langle \mathbb{u}_3, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \langle \mathbb{u}_3, \mathbb{v}_2 \rangle \mathbb{v}_2}{||\mathbb{u}_3 - \langle \mathbb{u}_3, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \langle \mathbb{u}_3, \mathbb{v}_2 \rangle \mathbb{v}_2||}$ とすればよい.

定理 21 (グラム・シュミットの正規直交化法)

有限次元内積空間 $V \neq \{\mathbb{o}\}$ は正規直交基底をもつ.

(証明) V : 内積空間, $\dim V = n > 0$. V の基底を 1 つとり, $\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n$ とする. この $\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n$ から正規直交基底 $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ をつくる.

Step 1. $\mathbb{v}_1 := \frac{\mathbb{u}_1}{||\mathbb{u}_1||}$ $(\Rightarrow ||\mathbb{v}_1|| = 1)$.

Step 2. $\mathbb{v}_1$ に直交する $||\mathbb{v}_2|| = 1$ なる $\mathbb{v}_2$ をつくる. それには, $\mathbb{u}_2$ の $W_1 = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1\}$ に関する直交成分 $\mathbb{u}_2 - \mathbb{w}_1 = \mathbb{u}_2 - \mathrm{proj}_{W_1}\mathbb{u}_2$ を正規化して, $\mathbb{v}_2 := \frac{\mathbb{u}_2 - \mathrm{proj}_{W_1}\mathbb{u}_2}{||\mathbb{u}_2 - \mathrm{proj}_{W_1}\mathbb{u}_2||} = \frac{\mathbb{u}_2 - \langle \mathbb{u}_2, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1}{||\mathbb{u}_2 - \langle \mathbb{u}_2, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1||}$ とすればよい.

Step 3. $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2$ に直交する $||\mathbb{v}_3|| = 1$ なる $\mathbb{v}_3$ をつくる. それには, $\mathbb{u}_3$ の $W_2 = \mathrm{Span}\{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2\}$ に関する直交成分 $\mathbb{u}_3 - \mathbb{w}_1 = \mathbb{u}_3 - \mathrm{proj}_{W_2}\mathbb{u}_3$ を正規化して, $\mathbb{v}_3 := \frac{\mathbb{u}_3 - \mathrm{proj}_{W_2}\mathbb{u}_3}{||\mathbb{u}_3 - \mathrm{proj}_{W_2}\mathbb{u}_3||} = \frac{\mathbb{u}_3 - \langle \mathbb{u}_3, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \langle \mathbb{u}_3, \mathbb{v}_2 \rangle \mathbb{v}_2}{||\mathbb{u}_3 - \langle \mathbb{u}_3, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \langle \mathbb{u}_3, \mathbb{v}_2 \rangle \mathbb{v}_2||}$ とすればよい.

これを繰り返して, 正規直交基底 $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ をえる. □

例

ユークリッド内積をもったユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の基底
$\mathbb{u}_1 = (1,1,1), \mathbb{u}_2 = (0,1,1), \mathbb{u}_3 = (0,0,1)$ から
グラム・シュミットの正規直交化法で正規直交基底 $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3$ をつくる.

例

ユークリッド内積をもったユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の基底
$\mathbb{u}_1 = (1,1,1), \mathbb{u}_2 = (0,1,1), \mathbb{u}_3 = (0,0,1)$ から
グラム・シュミットの正規直交化法で正規直交基底 $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3$ をつくる.

Step 1. $\mathbb{v}_1 := \frac{\mathbb{u}_1}{||\mathbb{u}_1||} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

例

ユークリッド内積をもったユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の基底
$\mathbb{u}_1 = (1,1,1), \mathbb{u}_2 = (0,1,1), \mathbb{u}_3 = (0,0,1)$ から
グラム・シュミットの正規直交化法で正規直交基底 $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3$ をつくる.

Step 1. $\mathbb{v}_1 := \frac{\mathbb{u}_1}{||\mathbb{u}_1||} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Step 2. $\mathbb{v}_2 := \frac{\mathbb{u}_2 - \langle \mathbb{u}_2, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1}{||\mathbb{u}_2 - \langle \mathbb{u}_2, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1||}$.

例

ユークリッド内積をもったユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の基底
$\mathbb{u}_1 = (1,1,1), \mathbb{u}_2 = (0,1,1), \mathbb{u}_3 = (0,0,1)$ から
グラム・シュミットの正規直交化法で正規直交基底 $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3$ をつくる.

Step 1. $\mathbb{v}_1 := \frac{\mathbb{u}_1}{||\mathbb{u}_1||} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Step 2. $\mathbb{v}_2 := \frac{\mathbb{u}_2 - \langle \mathbb{u}_2, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1}{||\mathbb{u}_2 - \langle \mathbb{u}_2, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1||}$. ここで,

$\mathbb{u}_2 - \langle \mathbb{u}_2, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 = (0,1,1) - \frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ より,

$||\mathbb{u}_2 - \langle \mathbb{u}_2, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1|| = \sqrt{(-\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

例

ユークリッド内積をもったユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の基底
$\mathbb{u}_1 = (1,1,1), \mathbb{u}_2 = (0,1,1), \mathbb{u}_3 = (0,0,1)$ から
グラム・シュミットの正規直交化法で正規直交基底 $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3$ をつくる.

Step 1. $\mathbb{v}_1 := \frac{\mathbb{u}_1}{||\mathbb{u}_1||} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Step 2. $\mathbb{v}_2 := \frac{\mathbb{u}_2 - \langle \mathbb{u}_2, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1}{||\mathbb{u}_2 - \langle \mathbb{u}_2, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1||}$. ここで,

$\mathbb{u}_2 - \langle \mathbb{u}_2, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 = (0,1,1) - \frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ より,

$||\mathbb{u}_2 - \langle \mathbb{u}_2, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1|| = \sqrt{(-\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

$\therefore \ \mathbb{v}_2 = \frac{3}{\sqrt{6}}(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = (-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$.

例

ユークリッド内積をもったユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の基底
$\mathbb{u}_1 = (1,1,1), \mathbb{u}_2 = (0,1,1), \mathbb{u}_3 = (0,0,1)$ から
グラム・シュミットの正規直交化法で正規直交基底 $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3$ をつくる.

Step 1. $\mathbb{v}_1 := \frac{\mathbb{u}_1}{||\mathbb{u}_1||} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Step 2. $\mathbb{v}_2 := \frac{\mathbb{u}_2 - \langle \mathbb{u}_2, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1}{||\mathbb{u}_2 - \langle \mathbb{u}_2, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1||}$. ここで,

$\mathbb{u}_2 - \langle \mathbb{u}_2, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 = (0,1,1) - \frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ より,

$||\mathbb{u}_2 - \langle \mathbb{u}_2, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1|| = \sqrt{(-\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

$\therefore \ \mathbb{v}_2 = \frac{3}{\sqrt{6}}(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = (-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$.

Step 3. $\mathbb{v}_3 := \frac{\mathbb{u}_3 - \langle \mathbb{u}_3, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \langle \mathbb{u}_3, \mathbb{v}_2 \rangle \mathbb{v}_2}{||\mathbb{u}_3 - \langle \mathbb{u}_3, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \langle \mathbb{u}_3, \mathbb{v}_2 \rangle \mathbb{v}_2||}$.

例

ユークリッド内積をもったユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の基底
$\mathbb{u}_1 = (1,1,1), \mathbb{u}_2 = (0,1,1), \mathbb{u}_3 = (0,0,1)$ から
グラム・シュミットの正規直交化法で正規直交基底 $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3$ をつくる.

Step 1. $\mathbb{v}_1 := \frac{\mathbb{u}_1}{||\mathbb{u}_1||} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Step 2. $\mathbb{v}_2 := \frac{\mathbb{u}_2 - \langle \mathbb{u}_2, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1}{||\mathbb{u}_2 - \langle \mathbb{u}_2, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1||}$. ここで,

$\mathbb{u}_2 - \langle \mathbb{u}_2, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 = (0,1,1) - \frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ より,

$||\mathbb{u}_2 - \langle \mathbb{u}_2, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1|| = \sqrt{(-\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

$\therefore\ \mathbb{v}_2 = \frac{3}{\sqrt{6}}(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = (-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$.

Step 3. $\mathbb{v}_3 := \frac{\mathbb{u}_3 - \langle \mathbb{u}_3, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \langle \mathbb{u}_3, \mathbb{v}_2 \rangle \mathbb{v}_2}{||\mathbb{u}_3 - \langle \mathbb{u}_3, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \langle \mathbb{u}_3, \mathbb{v}_2 \rangle \mathbb{v}_2||}$. ここで,

$\mathbb{u}_3 - \langle \mathbb{u}_3, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \langle \mathbb{u}_3, \mathbb{v}_2 \rangle \mathbb{v}_2 = (0,0,1) - \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) - \frac{1}{\sqrt{6}}(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}) = (0,0,1) - (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) - (-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}) = (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ より,

$||\mathbb{u}_3 - \langle \mathbb{u}_3, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \langle \mathbb{u}_3, \mathbb{v}_2 \rangle \mathbb{v}_2|| = \sqrt{0^2 + (-\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

例

ユークリッド内積をもったユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の基底
$\mathbb{u}_1 = (1,1,1), \mathbb{u}_2 = (0,1,1), \mathbb{u}_3 = (0,0,1)$ から
グラム・シュミットの正規直交化法で正規直交基底 $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3$ をつくる.

Step 1. $\mathbb{v}_1 := \frac{\mathbb{u}_1}{||\mathbb{u}_1||} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Step 2. $\mathbb{v}_2 := \frac{\mathbb{u}_2 - \langle \mathbb{u}_2, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1}{||\mathbb{u}_2 - \langle \mathbb{u}_2, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1||}$. ここで,

$\mathbb{u}_2 - \langle \mathbb{u}_2, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 = (0,1,1) - \frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ より,

$||\mathbb{u}_2 - \langle \mathbb{u}_2, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1|| = \sqrt{(-\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

$\therefore \ \mathbb{v}_2 = \frac{3}{\sqrt{6}}(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = (-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$.

Step 3. $\mathbb{v}_3 := \frac{\mathbb{u}_3 - \langle \mathbb{u}_3, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \langle \mathbb{u}_3, \mathbb{v}_2 \rangle \mathbb{v}_2}{||\mathbb{u}_3 - \langle \mathbb{u}_3, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \langle \mathbb{u}_3, \mathbb{v}_2 \rangle \mathbb{v}_2||}$. ここで,

$\mathbb{u}_3 - \langle \mathbb{u}_3, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \langle \mathbb{u}_3, \mathbb{v}_2 \rangle \mathbb{v}_2 = (0,0,1) - \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) - \frac{1}{\sqrt{6}}(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}) = (0,0,1) - (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) - (-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}) = (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ より,

$||\mathbb{u}_3 - \langle \mathbb{u}_3, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \langle \mathbb{u}_3, \mathbb{v}_2 \rangle \mathbb{v}_2|| = \sqrt{0^2 + (-\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\therefore \ \mathbb{v}_3 = \sqrt{2}(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.