

線形代数IIA（第11回・2025/5/19）小テスト

在籍番号		氏名	
------	--	----	--

[1] (定義) V, W を線形空間とする. 写像 $F: V \rightarrow W$ が線形写像とは,

$$(i) \quad F(u + v) = \boxed{} \quad (\forall u, v \in V) \quad (1);$$

$$(ii) \ F(k \mathfrak{u}) = \boxed{} \quad (\forall k \in \mathbb{R}, \forall \mathfrak{u} \in V) \quad (2)$$

を満たすこと. 定義から, 線形写像 F は $F(\mathfrak{d}) = \square$ (3) を満たすことが分かる.

特に、 $V = W$ のとき線形写像 F を V 上の $\square$ (4) という。

[2] 次の に ある または ない を入れよ.

(1) 写像 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ x+y \\ 0 \end{pmatrix}$ は線形写像で

(2) 写像 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x+1 \\ x \end{pmatrix}$ は線形写像で

(3) 写像 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}$ は線形写像で .

(4) 写像 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y + z \\ x + y - z \\ 0 \\ xyz \end{pmatrix}$ は線形写像で

[3] (定義) V, W を線形空間, $T: V \rightarrow W$ を線形写像とする.

(1) $\text{Ker}(T) := \{\mathfrak{v} \in V \mid T(\mathfrak{v}) = \mathfrak{o}\} \subset V$ を T の (kernel) という。

(2) $\text{Im}(T) := \{T(\mathfrak{v}) \mid \mathfrak{v} \in V\} \subset W$ を T の (image) という.

例えば, $T: V \rightarrow W, \mathbb{V} \mapsto \mathbb{0}$: ゼロ写像に対して, $\text{Ker}(T) = V, \text{Im}(T) = \{\mathbb{0}\}$.

※ $\mathbf{0}$ と $\{\mathbf{0}\}$ は違うので注意すること. $\mathbf{0}$ はゼロ・ベクトルという元, $\{\mathbf{0}\}$ は集合である.