

線形代数IIA（第4回・2025/4/21）小テスト

在籍番号		氏名	
------	--	----	--

[1] 次の に 独立 または 従属 を入れよ.

(1-1) (定義) V を線形空間とする. ベクトル $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \in V$ が 1 次 であるとは,
 $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{R}$ に対して

$$k_1 \mathbf{v}_1 + \dots + k_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0} \implies k_1 = \dots = k_r = 0$$

を満たすこと. (1-2) そうでないとき, 1 次 という.

(2) $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ とすると, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3$ である. よって,
 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ は 1 次 であり, $\mathbb{R}^3 \neq \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ となる.

(3) $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$ とすると,
 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ は 1 次 であり, $\mathbb{R}^3 = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ となる.

(4) $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{v}_4 = (0, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$ とすると,
 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ は 1 次 であり, $\mathbb{R}^4 = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ となる.

(5) $\mathbf{v}_1 = (-3, 1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, -3, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 1, -3, 1)$, $\mathbf{v}_4 = (1, 1, 1, -3) \in \mathbb{R}^4$ とすると,
 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ は 1 次 である.

(6) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ とすると,
 A, B, C は 1 次 である.

(7) $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$, $f_4(x) = x^3 \in \mathbb{R}[x]_3$ とすると,
 f_1, f_2, f_3, f_4 は 1 次 であり, $\mathbb{R}[x]_3 = \text{Span}\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ となる.

(8-1) $f_1(x) = 1 - x$, $f_2(x) = x - x^2$, $f_3(x) = x^2 - x^3$, $f_4 = 1 - x^3 \in \mathbb{R}[x]_3$ とすると,
 f_1, f_2, f_3, f_4 は 1 次 であるが, (8-2) f_1, f_2, f_3 は 1 次 となる.