

はじめに (数学基礎 B1)

数学基礎 B = 線形代数

教科書「要点明解 線形数学 三訂版」培風館

(第1章 ベクトル)

▶ 第2章 行列

▶ 第3章 連立1次方程式

(第4章 行列式)

(第5章 行列の対角化)

講義の情報

<http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス

LINK

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと。
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

第3章 連立1次方程式

連立1次方程式を解く.

$$(3) = (1) - 2 \times (2)$$

$$\begin{cases} 4x + 5y = 3 \cdots (1) \\ 2x + 3y = 1 \cdots (2) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -y = 1 \cdots (3) \\ 2x + 3y = 1 \cdots (2) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 1 \cdots (2) \\ -y = 1 \cdots (3) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} 2x = 4 \cdots (4) \\ -y = 1 \cdots (3) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x = 4 \cdots (4) \\ y = -1 \cdots (5) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 2 \cdots (6) \\ y = -1 \cdots (5) \end{cases}$$

$$(4) = (2) + 3 \times (3)$$

$$(5) = (-1) \times (3)$$

$$(6) = \frac{1}{2} \times (4)$$

第3章 連立1次方程式

連立1次方程式を解く.

$$(3) = (1) - 2 \times (2)$$

$$\begin{cases} 4x + 5y = 3 \cdots (1) \\ 2x + 3y = 1 \cdots (2) \end{cases} \xrightarrow{\text{III}} \begin{cases} -y = 1 \cdots (3) \\ 2x + 3y = 1 \cdots (2) \end{cases} \xrightarrow{\text{I}} \begin{cases} 2x + 3y = 1 \cdots (2) \\ -y = 1 \cdots (3) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{III}} \begin{cases} 2x = 4 \cdots (4) \\ -y = 1 \cdots (3) \end{cases} \xrightarrow{\text{II}} \begin{cases} 2x = 4 \cdots (4) \\ y = -1 \cdots (5) \end{cases} \xrightarrow{\text{II}} \begin{cases} x = 2 \cdots (6) \\ y = -1 \cdots (5) \end{cases}$$

$$(4) = (2) + 3 \times (3)$$

$$(5) = (-1) \times (3)$$

$$(6) = \frac{1}{2} \times (4)$$

I. 2つの行を交換

II. ある行を k 倍 ($k \neq 0$)

III. ある行の k 倍を他の行に加える

(行) 基本変形

(前回)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\text{III}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{II}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{II}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

注意

連立 1 次方程式を解く

対応
 $\longleftrightarrow$

(行) 基本変形 I, II, III をくり返して $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{array} \right)$ の形にする.

すなわち, 左側を単位行列 $E_2 = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right)$ にする.

このとき, 連立 1 次方程式の解 $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ がえられる.

例

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y + z = 10 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcolor{red}{1} & 1 & 2 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{\downarrow \times(-2)} \boxed{\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ \textcolor{red}{0} & -3 & -3 & -15 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{\downarrow \times(-3)} \boxed{\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ \textcolor{red}{0} & -1 & -5 & -17 \end{array} \right) \times(-\frac{1}{3})$$

$$\boxed{\text{II}} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & \textcolor{red}{1} & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -5 & -17 \end{array} \right) \xrightarrow{\downarrow \times 1} \boxed{\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & \textcolor{red}{0} & -4 & -12 \end{array} \right) \xrightarrow{\uparrow \times(-1)} \boxed{\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \textcolor{red}{0} & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array} \right) \times(-\frac{1}{4})$$

$$\boxed{\text{II}} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & \textcolor{red}{1} & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\uparrow \times(-1)} \boxed{\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \textcolor{red}{0} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\uparrow \times(-1)} \boxed{\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \textcolor{red}{0} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \therefore \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

注意

行基本変形 I, II, III は **1 つずつ行うこと** … **コツコツ** やりましょう
例えば, 1 行目を 3 行目に加え, 同時に 3 行目を 1 行目に加えると,
1 行目も 3 行目も同じになります. が, **間違っています**.

注意

行基本変形を行うこと. **列ではダメ**.

注意

行基本変形 $\rightarrow$ は逆に戻ることもできる. ($\longleftrightarrow$)
ここから $\rightarrow$ の最初と最後の解は **完全に一致している** ことがわかる.
行ったり来たり ($\longleftrightarrow$) できることが重要.
片向き $\leftarrow, \rightarrow$ だと **全ての解をもれなくぴったり求めた** とは言えない.

- ▶ 左側を必ず単位行列 E_n にできるわけではない.
これは, 解が 1 つ (1 組) のときにおこる.
しかし, 解がないときも, 解が無数にあるときもある. 一般には …

3.2 掃き出し法

定理

全ての $m \times n$ 行列は (行) 基本変形を何回か行って次の形に変形できる：

$$\begin{array}{c}
 \text{第 } 1 \text{ 行} \\
 \text{第 } 2 \text{ 行} \\
 \vdots \\
 \text{第 } r \text{ 行} \\
 \vdots
 \end{array}
 \left(
 \begin{array}{cccccccccccc}
 & & & \text{第 } n_1 \text{ 列} & & \cdots & & \text{第 } n_2 \text{ 列} & & \cdots & & \text{第 } n_r \text{ 列} & & \\
 0 & \cdots & 0 & \color{red}{1} & * & \cdots & * & 0 & & & & \boxed{0} & & \\
 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \color{red}{1} & & & & 0 & & \\
 & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \star \\
 & & & \vdots & & & & \vdots & & & & 0 & & \star \\
 & & & \color{red}{\text{左より見てゆく}} \longrightarrow & & & & & & & & \color{red}{1} & \color{red}{\text{初 } 1} & \\
 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & \\
 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
 \end{array}
 \right)$$

注意

(1) 各行を左から見ていくと、0でない最初の数は1.

この1を初1 (はついち) という.

(2) 上の行の初1は下の行の初1より左にある.

つまり、階段になっている.

(3) 初1の上下は全て0.

この(1), (2), (3)をみたす行列を ガウス行列 という.