

はじめに (数学基礎 B1)

数学基礎 B = 線形代数

教科書「要点明解 線形数学 三訂版」培風館

(第1章 ベクトル)

▶ 第2章 行列

▶ 第3章 連立1次方程式

(第4章 行列式)

(第5章 行列の対角化)

講義の情報

<http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス

LINK

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと。
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

定理

全ての $m \times n$ 行列は (行) 基本変形を何回か行って **ガウス行列** にできる.

(証明) $A = \mathbf{O}$ (零行列) は **ガウス行列**. $A \neq \mathbf{O}$ のとき, A を第 1 列 (左) から順にみて最初の零ベクトルでない列を n_1 列とする. 基本変形 I で行を交換, II で (k 倍して) 一番上を 1 に, III で 1 の下をすべて 0 にできる. この操作を $(1, n_1)$ 成分を中心として第 n_1 列を 掃き出す という. これを繰り返していけば, **ガウス行列** をえる. □

▶ このようにして **ガウス行列** を求める方法を 掃き出し法 という.

例

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix} \text{ を掃き出し法でガウス行列にする.}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} \downarrow \times (-3)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \mathbf{0} & 8 & -8 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} \downarrow \times (-5)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & \mathbf{0} & 8 & -8 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\downarrow \times (-2)}$$

$$\xrightarrow{\text{III}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & \mathbf{0} & 8 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times \frac{1}{8} \text{ II}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} \uparrow \times 1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathbf{0} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\downarrow \times (-8)}$$

$$\xrightarrow{\text{III}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\downarrow \times (-8) \text{ III}} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \dots \text{ガウス行列}$$

定義 (階数)

行列 A を行基本変形して **ガウス行列**にしたときの**初 1** の数 (階段の数) を A の **階数** (rank) といい, $\text{rank}(A)$ とあらわす.

例

上の例より,

$$\text{rank} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix} \right) = \text{rank} \left(\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 2.$$

また, 以前の例より

$$\text{rank} \left(\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{rank} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 \end{pmatrix} \right) = 2.$$

$$\text{rank} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix} \right) = \text{rank} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \end{pmatrix} \right) = 3.$$

注意

行列 A の階数 $\text{rank}(A)$ は行基本変形では変化しない.

注意

$A : m \times n$ 行列 $\Rightarrow \text{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$.

但し, $\min\{m, n\}$ は m と n の最小値 (minimum) をあらわす.

3.3 連立1次方程式

より一般には,

$$\text{連立1次方程式} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \cdots(1)$$

を解く必要がでてくる. (1) は, 行列をもちいて

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{に対して,}$$

$$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}}$$

と表せる. 行列 $\mathbf{A}$ を連立1次方程式 (1) の 係数行列, $\mathbf{A}$ の最後の列に $\mathbf{b}$ を付け加えた $m \times (n+1)$ 行列 $\overline{\mathbf{A}} = (\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ を 拡大係数行列 という.