

はじめに (数学基礎 B1)

数学基礎 B = 線形代数

教科書「要点明解 線形数学 三訂版」培風館

(第1章 ベクトル)

▶ 第2章 行列

▶ 第3章 連立1次方程式

(第4章 行列式)

(第5章 行列の対角化)

講義の情報

<http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス

LINK

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと。
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

3.3 連立1次方程式

復習 より一般には,

$$\text{連立1次方程式} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \cdots(1)$$

を解く必要がでてくる. (1) は, 行列をもちいて

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{に対して,}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

と表せる. 行列 A を連立1次方程式 (1) の **係数行列**, A の最後の列に $\mathbf{b}$ を付け加えた $m \times (n+1)$ 行列 $\overline{A} = (A \mid \mathbf{b})$ を **拡大係数行列** という.

拡大係数行列 $\overline{A} = (A \mid \mathbf{b})$ に行基本変形を何回か行って

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccc|c} & & & \text{第} & & & & \text{第} & & & \text{第} & & & \text{第} \\ & & & n_1 & \cdots & & n_2 & \cdots & & n_r & \cdots & & n+1 \\ & & & \text{列} & & & \text{列} & & & \text{列} & & & \text{列} \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{1} & * & \cdots & * & 0 & & 0 & & & d_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{1} & & 0 & & & d_2 \\ & & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \star & \vdots & \star & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & & \vdots & & 0 & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{1} & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ \vdots & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_m \end{array} \right)$$

とできる．(左側の A を **ガウス行列** に変形した)

ここで $x_{n_1} \rightarrow y_1, x_{n_2} \rightarrow y_2, \dots, x_{n_r} \rightarrow y_r$

それ以外の x_j ($j \neq n_1, \dots, n_r$) は順に $y_{r+1}, \dots, y_n$ とする．

これにより，次の連立 1 次方程式をえる：

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} y_1 & & + & c_{1\ r+1}y_{r+1} & + & \cdots & + & c_{1n}y_n = & d_1 \\ & y_2 & & + & c_{2\ r+1}y_{r+1} & + & \cdots & + & c_{2n}y_n = & d_2 \\ & & \ddots & & & & & & & \vdots \\ & & & y_r & + & c_{r\ r+1}y_{r+1} & + & \cdots & + & c_{rn}y_n = & d_r \\ & & & & & & & & 0 & = & d_{r+1} \\ & & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & 0 & = & d_m \end{array} \right.$$

$(d_{r+1}, \dots, d_m) \neq (0, \dots, 0)$ のとき, 解は存在しない.

$(d_{r+1}, \dots, d_m) = (0, \dots, 0)$ のとき,

$y_{r+1} \rightarrow t_{r+1}, \dots, y_n \rightarrow t_n$ (t_i は任意定数) とおくと解をえる:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} y_1 & = & d_1 & - & c_{1\ r+1}t_{r+1} & - & \cdots & - & c_{1n}t_n \\ y_2 & = & d_2 & - & c_{2\ r+1}t_{r+1} & - & \cdots & - & c_{2n}t_n \\ & & \ddots & & & & & & \\ y_r & = & d_r & - & c_{r\ r+1}t_{r+1} & - & \cdots & - & c_{rn}t_n \\ y_{r+1} & = & & & t_{r+1} & & & & \\ \vdots & & & & & & \ddots & & \\ y_n & = & & & & & & & t_n \end{array} \right.$$

よって, 連立1次方程式(1)が解をもつ $\iff \text{rank}(A) = \text{rank}(\overline{A})$.

定理 3.1

連立 1 次方程式 (1) が解をもつ $\iff \text{rank}(A) = \text{rank}(\overline{A})$.

例

文字 a を含む連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + 3z = a \end{cases} \text{ を解く.} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & a \end{array} \right).$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcolor{red}{1} & 1 & 2 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & a \end{array} \right) \xrightarrow{\downarrow \times(-2)} \boxed{\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ \textcolor{red}{0} & -3 & -3 & -18 \\ 3 & 0 & 3 & a \end{array} \right) \xrightarrow{\downarrow \times(-3)} \boxed{\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -3 & -3 & -18 \\ \textcolor{red}{0} & -3 & -3 & a-27 \end{array} \right) \times(-\frac{1}{3})$$

$$\boxed{\text{II}} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & \textcolor{red}{1} & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & a-27 \end{array} \right) \xrightarrow{\downarrow \times 3} \boxed{\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & \textcolor{red}{0} & 0 & a-9 \end{array} \right) \xrightarrow{\uparrow \times(-1)} \boxed{\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} \textcolor{red}{1} & 0 & \textcolor{blue}{1} & 3 \\ 0 & \textcolor{red}{1} & \textcolor{blue}{1} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \textcolor{blue}{a-9} \end{array} \right)$$

$\therefore a \neq 9$ のとき, **解なし**. $a = 9$ のとき, $\begin{cases} \textcolor{red}{x} + \textcolor{blue}{z} = 3 \\ \textcolor{red}{y} + \textcolor{blue}{z} = 6 \end{cases}$ より,

解は $x = 3 - t, y = 6 - t, z = t$ (t は任意の実数).

応用 (A^{-1} を求める)

▶ 行列 A の逆行列 A^{-1} を求める！

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \text{ ? ? ? }$$

基本ベクトル $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して,

$$A \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, 3) \text{ を考える. それぞれ解 } \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \mathbf{b}_i = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ b_{3i} \end{pmatrix}$$

$$\text{をもったとすると, } A \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = \mathbf{e}_1, \quad A \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} = \mathbf{e}_2, \quad A \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix} = \mathbf{e}_3 .$$

$$\text{これをまとめてかくと, } A \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E .$$

$$\text{つまり, } A \text{ の逆行列 } A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \text{ がえられた.}$$

$A \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, 3)$ を **3つ同時に解く**．それには,

$$\left(A \mid \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ を (行) 基本変形して, } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & B \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array} \right)$$

とすれば, 解 $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \mathbf{b}_i = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ b_{3i} \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, 3)$ が**同時に**えられる.

定理 3.2

$A : n$ 次正方行列. A が正則のとき, (行) 基本変形によって
 $(A \mid E) \rightarrow \cdots \rightarrow \cdots \rightarrow (E \mid B) \quad (\text{但し, } E = E_n \text{ は } n \text{ 次単位行列})$
とすれば, $B = A^{-1}$ として行列 A の逆行列 A^{-1} が求まる.

注意

A が正則 $\Rightarrow (A \mid E) \rightarrow \cdots \rightarrow \cdots \rightarrow (E \mid B)$ とできる.
すなわち, 左側を単位行列 E にできない $\Rightarrow A$ は正則でない.

▶ 最初の問題に戻ると …

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \text{ ? ? ? }$$

(行) 基本変形を行うと

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & 0 \\ A & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \cdots \rightarrow \cdots \rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array} \middle| B \right) \text{ として,}$$

(行基本変形を各自行う. 教 p.65 も参考に)

$$B = A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & -\frac{5}{12} & \frac{1}{4} \\ \frac{7}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \\ 7 & 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ をえる.}$$

▶ 検算が必要 !!! (特に試験時)

$$\text{それには} \cdots AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E \text{ を実際に計算して確かめる.}$$