

はじめに (数学基礎 B2)

数学基礎 B = 線形代数

教科書 「要点明解 線形数学」 培風館

(第1章 ベクトル)

(第2章 行列)

(第3章 連立1次方程式)

▶ 第4章 行列式

▶ 第5章 行列の対角化

講義の情報

<http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html>

シラバス

LINK

- ▶ ノートを取りながら講義を聴くこと。
(ノートを回収して確認する可能性があります)
- ▶ 講義 → 小テスト (理解度確認テスト, 学務情報システム内)

- ▶ $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の 内積 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n (= \mathbf{x}^T \mathbf{y})$ が定義されているとき, $\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{E}^n$ と書き, n 次元ユークリッド空間 といった.

定理 5.5 (コーシー・シュワルツの不等式)

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}^n$ に対して, $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$.

等号成立 $\Leftrightarrow a\mathbf{x} + b\mathbf{y} = \mathbf{0}$ なる $a, b \in \mathbb{R}$ が存在.

- ▶ 定理 5.5 より, $-1 \leq \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \leq 1$.

定義 (ベクトルのなす角, 直交)

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}^n$ ($\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$).

$$\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} = \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

なる θ がただ 1 つ存在し, $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の なす角 という.

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ のとき, $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は直交する という. (つまり, $\theta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$)

定義 (正射影, 直交成分)

$\mathbf{v} \in \mathbb{E}^n$, 大きさ $\|\mathbf{v}\| = 1$ とする.

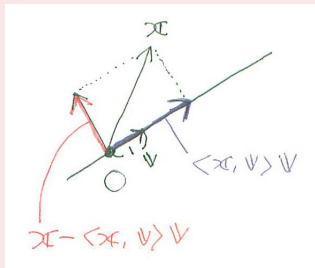
$\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$ に対して,

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}$ を $\mathbf{x}$ の $\mathbf{v}$ 方向への正射影, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle$ を $\mathbf{v}$ 方向の成分,

$\mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}$ を $\mathbf{x}$ の $\mathbf{v}$ に関する直交成分 という.

注意

実際, 次のようになる :



定理 5.6

$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{E}^n$ ($1 \leq k \leq n-1$) は、大きさが1, 互いに直交していると
する. $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$ に対して,

$$\mathbf{x}' := \mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 - \dots - \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_k \rangle \mathbf{v}_k$$

は, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ と直交する.

$\therefore$ 例えば, $\mathbf{x}'$ と $\mathbf{v}_1$ が直交するのは,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}', \mathbf{v}_1 \rangle &= \langle \mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 - \dots - \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_k \rangle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_1 \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle - \dots - \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_k \rangle \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_1 \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \cdot 1 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \cdot 0 - \dots - \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_k \rangle \cdot 0 \\ &= 0 \text{ のようにわかる. } (\because \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle = \|\mathbf{v}_1\|^2 = 1, \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_1 \rangle = 0 \ (i \neq 1)) \\ \mathbf{x}' \text{ と } \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \text{ が直交することも同様にしてわかる.} \end{aligned}$$

定理 5.7 (グラム・シュミットの正規直交化法)

$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{E}^n$.

行列 $Q = (\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n)$ は 正則を仮定する. ($|Q| \neq 0$)

$$\mathbf{p}_1 := \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}.$$

$i = 2, \dots, n$ に対して, 順番に

$$\mathbf{p}_i := \frac{\mathbf{v}_i - \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{p}_1 \rangle \mathbf{p}_1 - \cdots - \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{p}_{i-1} \rangle \mathbf{p}_{i-1}}{\|\mathbf{v}_i - \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{p}_1 \rangle \mathbf{p}_1 - \cdots - \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{p}_{i-1} \rangle \mathbf{p}_{i-1}\|}$$

とすれば, $P = (\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n)$ は直交行列.

注意

前回の例より,

$$P = (\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n) \text{ は直交行列} \Leftrightarrow \langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \|\mathbf{p}_i\| = \sqrt{\langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_i \rangle} = 1 \text{ (正規という) かつ } \mathbf{p}_i \text{ と } \mathbf{p}_j \text{ } (i \neq j) \text{ は直交する.}$$

命題

A : 対称行列. ($A^T = A$)

$A \mathbf{p}_1 = \lambda_1 \mathbf{p}_1, A \mathbf{p}_2 = \lambda_2 \mathbf{p}_2$ ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) $\Rightarrow \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle = 0$.

(異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する)

$\therefore \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle = \mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_2$ より, $\mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_2 = 0$ を示せばよい.

$A \mathbf{p}_1 = \lambda_1 \mathbf{p}_1$ を転置して, $\mathbf{p}_1^T A^T = \lambda_1 \mathbf{p}_1^T$ より,

$$\lambda_1 \mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_2 = (\mathbf{p}_1^T A^T) \mathbf{p}_2 = (\mathbf{p}_1^T A) \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1^T (A \mathbf{p}_2) = \mathbf{p}_1^T (\lambda_2 \mathbf{p}_2) = \lambda_2 \mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_2$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_2 = 0 \quad (\because \lambda_1 \neq \lambda_2).$$

注意

各固有値に対して,

グラム・シュミットの正規直交化法を適用すればよい.

- ▶ 固有多項式 $f_A(t)$ が重根をもつときが問題となる

例

対称行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ を直交対角化せよ。

Step 1. A の固有多項式

$$f_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-3 & -1 & -1 \\ -1 & t-3 & -1 \\ -1 & -1 & t-3 \end{vmatrix} = (t-5)(t-2)^2 \text{ より,}$$

A の固有値は $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$ (2重解)。

Step 2. $\boxed{\lambda_1 = 5}$ に対する固有ベクトル $\mathbf{v}$ は, $(5E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ の解, } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$\boxed{\lambda_2 = 2}$ (2重解) に対する固有ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ は, $(2E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ の解, } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

例 (つづき)

Step 3. (各固有値に, グラム・シュミットの正規直交化法を適用)

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ に対して, } \mathbf{q} := \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ に対して,}$$

$$\mathbf{p}_1 := \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{p}_2 := \frac{\mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{p}_1 \rangle \mathbf{p}_1}{\|\mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{p}_1 \rangle \mathbf{p}_1\|} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

例 (つづき)

Step 5. $P = (\mathbf{q} \ \mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ とすれば,

P は直交行列であり, $P^{-1} = P^T$ となる. (グラム・シュミットより)

このとき, $P^{-1}AP = P^TAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

A を直交対角化できた. 実際,

$$\begin{aligned} AP &= (A\mathbf{q} \ A\mathbf{p}_1 \ A\mathbf{p}_2) = (\lambda_1 \mathbf{q} \ \lambda_2 \mathbf{p}_1 \ \lambda_2 \mathbf{p}_2) = (5\mathbf{q} \ 2\mathbf{p}_1 \ 2\mathbf{p}_2) \\ &= (\mathbf{q} \ \mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2) \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$