はじめに　(数学基礎 B2)

数学基礎 B　＝　線形代数

教科書　「要点明解 線形数学」培風館

(第 1 章　ベクトル)
(第 2 章　行列)
(第 3 章　連立 1 次方程式)
- 第 4 章　行列式
- 第 5 章　行列の対角化

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと．
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 $\longrightarrow$ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

5.3 基底と座標

定義 (基底，座標)

$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n \in \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の <u>基底</u> であるとは，すべての $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^n$ が
$\mathbb{a} = b_1\mathbb{v}_1 + \cdots + b_n\mathbb{v}_n$ $(b_i \in \mathbb{R})$ と一意的 (ただ 1 通り) に表せること．

このとき，$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ を <u>基底 $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ に関する $\mathbb{a}$ の座標</u> という．

- 一意的 (ただ 1 通り) とは $\cdots$
  $\mathbb{a} = b_1\mathbb{v}_1 + \cdots + b_n\mathbb{v}_n = c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + c_n\mathbb{v}_n \Rightarrow b_1 = c_1, \ldots, b_n = c_n.$

例

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}^n$ の座標は正規直交座標とよばれ，

$\mathbb{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbb{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^n$ を $\mathbb{E}^n$ の標準基底といった．

注意

基底の定義の式 $\mathbb{a} = b_1\mathbb{v}_1 + \cdots + b_n\mathbb{v}_n$ $(b_i \in \mathbb{R})$ は,

$$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \mathbb{v}_i = \begin{pmatrix} v_{1i} \\ \vdots \\ v_{ni} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \ (i = 1, \dots, n)$$ に対して,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix} + \cdots + b_n \begin{pmatrix} v_{1n} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

となる．よって,

$\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n \in \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の基底 $\Leftrightarrow$ すべての $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$\begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$ がただ一つの解 $\mathbb{x} = \mathbb{b}$ をもつ.

定理 5.8

$\mathbb{x}$: 標準基底 $\mathbb{e}_1, \ldots, \mathbb{e}_n$ に関する座標,
$\mathbb{x}'$: 基底 $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ に関する座標
$\Rightarrow \mathbb{x} = P\mathbb{x}'$. 但し，$P = (\mathbb{v}_1 \cdots \mathbb{v}_n)$ で $|P| \neq 0$. ($\Rightarrow \mathbb{x}' = P^{-1}\mathbb{x}$ となる)

定理 5.9

P : n 次正方行列.
P : 正則 $\Leftrightarrow$ P の列ベクトル全体が $\mathbb{R}^n$ の基底.

定義 (正規直交基底)

大きさが 1 で互いに直交しているベクトルからなる基底を <u>正規直交基底</u> という.

例

$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n \in \mathbb{E}^n$ を大きさが 1 で互いに直交しているとする．
前回の注意より，$A = (\mathbb{v}_1 \cdots \mathbb{v}_n)$ は直交行列 $(A^{\mathrm{T}}A = E)$ であり，
$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ は正規直交基底となる．実際，すべての $\mathbb{x} \in \mathbb{E}^n$ に対して，
$\mathbb{x} = \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 + \cdots + \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n$ と一意的に表せる．
$\because$ $\mathbb{x} = k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n \Rightarrow k_i = \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_i \rangle$ $(i = 1, \ldots, n)$ を示す．
$\langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_i \rangle = \langle k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i \rangle$
$= k_1\langle \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_i \rangle + \cdots + k_i\langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i \rangle + \cdots + k_n\langle \mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i \rangle$
$= k_1 \cdot 0 + \cdots + k_i \cdot 1 + \cdots + k_n \cdot 0 = k_i.$
$(\because \langle \mathbb{v}_j, \mathbb{v}_i \rangle = 0 \ (i \neq j), \ ||\mathbb{v}_i|| = 1)$

- (標準基底 $\mathbb{e}_1, \ldots, \mathbb{e}_n \in \mathbb{E}^n$ のかわりに)
  $\mathbb{x} \in \mathbb{E}^n$ に対して，正規直交基底 $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ を用いて，
  正規直交座標 $\begin{pmatrix} \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_n \rangle \end{pmatrix}$ を導入できる．

定義 (線形写像，線形変換)

写像 $\mathbb{y} = \mathbb{f}(\mathbb{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbb{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$

の各 $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ が $x_1, \ldots, x_n$ の同次 1 次式 (定数項なし) のとき，$\mathbb{y} = \mathbb{f}(\mathbb{x})$ を 線形写像 という．特に，$m = n$ のとき，線形変換 という．

注意

線形写像 $\mathbb{y} = \mathbb{f}(\mathbb{x})$ は

$$\mathbb{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

とかけるので，

$$\mathbb{y} = A\,\mathbb{x},\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ \mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

となる．

定理 5.10

$\mathbb{y} = \mathbb{f}(\mathbb{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: 線形写像.
(1) $\mathbb{x}, \mathbb{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\mathbb{f}(\mathbb{x} + \mathbb{y}) = \mathbb{f}(\mathbb{x}) + \mathbb{f}(\mathbb{y})$;
(2) $\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n$ と $c \in \mathbb{R}$ に対して，$\mathbb{f}(c\,\mathbb{x}) = c\,\mathbb{f}(\mathbb{x})$.
逆に，(1), (2) をみたす写像 $\mathbb{y} = \mathbb{f}(\mathbb{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は線形写像.

例

$\mathbb{y} = \mathbb{f}(\mathbb{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: 線形変換，$\mathbb{y} = A\,\mathbb{x}$, $A : n \times n$ 行列.
A の固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (重複を許す) に対する，A の固有ベクトルを
$\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_n$ とする．さらに，$\underline{\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_n}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底を仮定する.

このとき，すべての $\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n$ は
$\mathbb{x} = X_1\mathbb{p}_1 + \cdots + X_n\mathbb{p}_n \ (X_i \in \mathbb{R})$ $\quad \mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
と一意的に表せる．また，
$\mathbb{f}(\mathbb{x}) = \mathbb{f}(X_1\mathbb{p}_1 + \cdots + X_n\mathbb{p}_n) = A(X_1\mathbb{p}_1 + \cdots + X_n\mathbb{p}_n) =$
$AX_1\mathbb{p}_1 + \cdots + AX_n\mathbb{p}_n = (\lambda_1 X_1)\mathbb{p}_1 + \cdots + (\lambda_n X_n)\mathbb{p}_n \ (\because \ A\mathbb{p}_i = \lambda_i\mathbb{p}_i)$
より，原点を通り，それぞれ $\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_n$ に平行な直線を座標軸にとれば，
この $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ 座標について，$\mathbb{f}(\mathbb{X}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}\mathbb{X} = D\,\mathbb{X}$ と
なる．$\mathbb{x} = P\,\mathbb{X}$, $P = (\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n)$ で，$A\,\mathbb{x} = \mathbb{f}(\mathbb{x}) = PD\,\mathbb{X} = PDP^{-1}\,\mathbb{x}$.
すなわち，$P^{-1}AP = D$.

- 固有ベクトルに平行な座標軸 $\mathbb{X}$ をとれば，$\mathbb{f}$ は簡潔な式になる！

- さらに … 実は，次が成り立つ：

定理

P : $n \times n$ 行列．次は同値：
(a) P は直交行列　$(P^{-1} = P^{\mathrm{T}})$;
(b) P の列ベクトル全体は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底；
(c) すべての $\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$||P\,\mathbb{x}|| = ||\mathbb{x}||$;
(d) すべての $\mathbb{x}, \mathbb{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\langle P\,\mathbb{x}, P\,\mathbb{y}\rangle = \langle \mathbb{x}, \mathbb{y}\rangle$.

- $\mathbb{x} = P\,\mathbb{X}$, $P = (\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n)$，$P$ は直交行列とすると，内積を変えない座標の変換，したがって，長さと角度を変えない座標の変換となる．$\left(\because\ \frac{\langle \mathbb{x},\mathbb{y}\rangle}{||\mathbb{x}||\,||\mathbb{y}||} = \cos\theta,\ ||\mathbb{x}|| = \sqrt{\langle \mathbb{x}, \mathbb{x}\rangle}\right)$
- 直交対角化 $P^{-1}AP = D$, $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$ は内積 (長さと角度) を変えない座標の変換によって線形変換 $\mathbb{f}$ をあらわしたもの．
- 実は，第 2 章の最後の例 2.25 (p. 46) (2 次形式と楕円の回転の例) が直交対角化の例になっていた！

例 (前回の例のつづき)

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ に対して，A^n を求めよ．前回の例の Step 2 より，

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ に対して，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(いまは Step 3 の直交対角化は必要ない．対角化のみで OK．)

$$\therefore A = P \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

$$\therefore A^n = P \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

例 (前回の例のつづき)

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ であるから,

$$
\begin{aligned}
\therefore A^n &= P \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n & 2^n & 2^n \\ 5^n & -2^n & 0 \\ 5^n & 0 & -2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n + 2 \cdot 2^n & 5^n - 2 \cdot 2^n + 2^n & 5^n + 2^n - 2 \cdot 2^n \\ 5^n - 2^n & 5^n + 2 \cdot 2^n & 5^n - 2^n \\ 5^n - 2^n & 5^n - 2^n & 5^n + 2 \cdot 2^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$