

数学基礎 B2 (第4回・2025/7/4) 小テスト

在籍番号		氏名	
------	--	----	--

[1] (定義) A を $n \times n$ 行列とする.

$$A \mathbf{p} = \lambda \mathbf{p}$$

なる $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$) が存在するとき, $\lambda \in \mathbb{R}$ を A の (1) といい,

$\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ を λ に対する A の (2) という. これより, 以下が成り立つ:

$\lambda \in \mathbb{R}$ が A の固有値 $\iff \lambda$ は t に関する n 次方程式 $f_A(t) = |tE - A| = 0$ の解.

$f_A(t) = |tE - A|$ を A の (3), $f_A(t) = 0$ を A の (4) と

いう. 例えば, 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して, $f_A(t) =$ (5) となる.

[2] 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする.

(1) A の固有多項式は である. (← 因数分解した形で答える.)

(2) A の固有値は, $\lambda_1 = 4$ と $\lambda_2 =$ (2重解) の2つである.

(3) A の λ_1 に対する固有ベクトルとして, $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \square \end{pmatrix}$ がとれ,

λ_2 に対する固有ベクトルとして, $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ がとれる.

但し, 3×3 行列 $P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3)$ が正則行列になるようにとる.

(4) 行列 P を用いれば, 行列 A を することができる.

すなわち, (5) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \square & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる.