Galois コホモロジーの
類体論における諸問題への応用について

半内　広貴

自然科学研究科数理物質科学専攻
博士前期課程 2 年

2022 年 2 月 9 日

イントロダクション

定理 (単項化定理, Furtwängler (1930))

k を代数体とする. k の任意のイデアルは, k の Hilbert 類体において単項化する.

イントロダクション

定理 (単項化定理, Furtwängler (1930))

k を代数体とする. k の任意のイデアルは, k の Hilbert 類体において単項化する.

D. Hilbert は Hilbert 類体の存在や単項化定理など類体に関するいくつかの結果を予想した.

イントロダクション

定理 (単項化定理, Furtwängler (1930))

k を代数体とする. k の任意のイデアルは, k の Hilbert 類体において単項化する.

D. Hilbert は Hilbert 類体の存在や単項化定理など類体に関するいくつかの結果を予想した.

高木貞治氏や E. Artin 達の活躍により, Hilbert が予想したよりも一般的な類体論が整備され, この類体論を用いて単項化定理は群論の移送とよばれる写像の自明性へと帰着され, 1930 年に Ph. Furtwängler により証明された.

イントロダクション

例えば $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-15})$ とする．このとき, k の Hilbert 類体は
$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{5})$ である．

イントロダクション

例えば $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-15})$ とする．このとき, k の Hilbert 類体は
$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{5})$ である．

$\to k$ は類数が 2 であり, よってその整数環は PID でない．

イントロダクション

例えば $k=\mathbb{Q}(\sqrt{-15})$ とする．このとき, k の Hilbert 類体は $K=\mathbb{Q}(\sqrt{-3},\sqrt{5})$ である.

$\rightarrow k$ は類数が 2 であり, よってその整数環は PID でない .

$\left(2,\dfrac{1+\sqrt{-15}}{2}\right)$ は k において単項イデアルでないが, これを K へと延長すれば, 単項イデアル $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ となる.

修士論文の内容

1. 無限次 Galois 理論
   - 位相群
   - 無限次 Galois 理論
   - 副有限群
   - 副有限群のいくつかの例
2. 有限群のコホモロジーと Hilbert 90
   - G 加群の概念
   - 有限群のコホモロジーの定義
   - コホモロジー群における加群の変更と長完全列
3. Hilbert 94 と単項化定理
   - 準備：類体論の復習
   - Hilbert 94 と単項化定理
4. 類体塔問題と今後の展望
   - 類体塔問題

1. 無限次 Galois 理論

1.1 位相群

定義 (位相群)

群 G が以下を満たすとき, G を**位相群**とよぶ.

(1) G は位相空間である.

(2) 次の２つの写像

$$\Phi : G \times G \to G \ , \ (x, y) \mapsto xy,$$
$$\Psi : G \to G \ , \ x \mapsto x^{-1}$$

がともに連続である.

1.1 位相群

定義 (位相群)

群 G が以下を満たすとき, G を位相群とよぶ.

(1) G は位相空間である.

(2) 次の２つの写像

$$\Phi : G \times G \to G \ , \ (x, y) \mapsto xy,$$
$$\Psi : G \to G \ , \ x \mapsto x^{-1}$$

がともに連続である.

有限群は離散位相を入れてコンパクト位相群とみなす.

1.1 位相群

定義 (位相群)

群 G が以下を満たすとき, G を位相群とよぶ.

(1) G は位相空間である.

(2) 次の２つの写像

$$\Phi : G \times G \to G \ , \ (x, y) \mapsto xy,$$
$$\Psi : G \to G \ , \ x \mapsto x^{-1}$$

がともに連続である.

有限群は離散位相を入れてコンパクト位相群とみなす.

命題

位相群 G の任意の部分群 H は相対位相に関して位相群となる.

定義

位相群 G の部分群 H について, H が閉集合のとき H を**閉部分群**, H が開集合のとき H を**開部分群**とよぶ.

1. 無限次 Galois 理論

定義

位相群 G の部分群 H について, H が閉集合のとき H を閉部分群, H が開集合のとき H を開部分群とよぶ.

命題

位相群 G の任意の開部分群は閉部分群となる.

1.2 無限次 Galois 理論

定義

G を群とする. $\mathcal{B} := \{gN \mid g \in G,\ N \triangleleft G,\ (G : N) < \infty\}$ を開集合系の基とするような位相が定まる. この位相を Krull 位相とよぶ.

1.2 無限次 Galois 理論

定義

G を群とする．$\mathcal{B} := \{gN \mid g \in G,\ N \triangleleft G,\ (G:N) < \infty\}$ を開集合系の基とするような位相が定まる．この位相を Krull 位相とよぶ．

Ω/k を必ずしも有限次とは限らない Galois 拡大とする．$G = \mathrm{Gal}(\Omega/k)$ に Krull 位相を入れる:

$$\mathcal{K} := \{K \mid K \text{ は} \Omega/k \text{ の有限次部分 Galois 拡大体 }\},$$
$$\mathcal{B} := \{\sigma\mathrm{Gal}(\Omega/K) \mid \sigma \in G,\ K \in \mathcal{K}\}.$$

1.2 無限次 Galois 理論

定義

G を群とする. $\mathcal{B} := \{gN \mid g \in G,\ N \triangleleft G,\ (G:N) < \infty\}$ を開集合系の基とするような位相が定まる. この位相を Krull 位相とよぶ.

Ω/k を必ずしも有限次とは限らない Galois 拡大とする. $G = \mathrm{Gal}(\Omega/k)$ に Krull 位相を入れる:

$$\mathcal{K} := \{K \mid K \text{ は} \Omega/k \text{ の有限次部分 Galois 拡大体 }\},$$
$$\mathcal{B} := \{\sigma\mathrm{Gal}(\Omega/K) \mid \sigma \in G,\ K \in \mathcal{K}\}.$$

$\to$ G は Hausdorff かつコンパクトであり, 正規部分群からなる単位元の基本近傍系を持つ.

1. 無限次 Galois 理論

定理

Ω/k を必ずしも有限次とは限らない Galois 拡大, G をその Galois 群とする.

$$\mathcal{M} := \{K \mid k \subset K \subset \Omega\}\ ,\ \mathcal{H} := \{H \mid H \text{ は } G \text{ の閉部分群 }\}$$

とするとき,

$$\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{H}\ ,\ \ K \mapsto \mathrm{Gal}(\Omega/K)$$

は全単射を与える. さらに, G の開部分群は Ω/k の有限次部分拡大と対応する.

1.3 副有限群

無限次の Galois 群の特徴を一般化して副有限群の定義を与える.

1.3 副有限群

無限次の Galois 群の特徴を一般化して副有限群の定義を与える.

定義

位相群 G が Hausdorff かつコンパクトであり, 正規部分群からなる単位元の基本近傍系を持つとき, G を**副有限群**とよぶ.

1.3 副有限群

無限次の Galois 群の特徴を一般化して副有限群の定義を与える.

定義

位相群 G が Hausdorff かつコンパクトであり, 正規部分群からなる単位元の基本近傍系を持つとき, G を**副有限群**とよぶ.

副有限群は以下のように特徴づけられる.

定理

G を Hausdorff な位相群とする. このとき以下は同値である.

(1) G は副有限群である;

(2) ある有限群からなる射影系 $\{G_i,\ f_{ij}\}$ が存在し, $G \cong \varprojlim_{i} G_i$ となる;

(3) G はコンパクトかつ全不連結である.

1.4 副有限群の例

体 k の分離閉包を k^{sep} と表す.

1.4 副有限群の例

体 k の分離閉包を k^{sep} と表す.

$\rightarrow k^{sep}/k$ は一般には無限次拡大である.

1.4 副有限群の例

体 k の分離閉包を k^{sep} と表す.

$\to k^{sep}/k$ は一般には無限次拡大である.

$G_k := \mathrm{Gal}(k^{sep}/k)$ は絶対 Galois 群とよばれる.

1.4 副有限群の例

体 k の分離閉包を k^{sep} と表す.

$\to k^{sep}/k$ は一般には無限次拡大である.

$G_k := \mathrm{Gal}(k^{sep}/k)$ は絶対 Galois 群とよばれる.

$\to K/k$ が k^{sep}/k の有限次 Galois 部分拡大を走るとき, $\mathrm{Gal}(k^{sep}/K)$ は G_k の開正規部分群を走る. $\mathrm{Gal}(K/k) \cong \mathrm{Gal}(k^{sep}/k)/\mathrm{Gal}(k^{sep}/K)$ により,

$$G_k \cong \varprojlim_{K/k:\text{有限次}} \mathrm{Gal}(K/k)$$

となる.

1. 無限次 Galois 理論

k^{sep}/k は k の有限次 Galois 拡大をすべて含んでいる.

1. 無限次 Galois 理論

k^{sep}/k は k の有限次 Galois 拡大をすべて含んでいる.

$\to G_k$ の研究は興味深い. しかし $\cdots$

1. 無限次 Galois 理論

k^{sep}/k は k の有限次 Galois 拡大をすべて含んでいる.

$\rightarrow G_k$ の研究は興味深い. しかし $\cdots$

問題 (Galois 逆問題)

有理数体 $\mathbb{Q}$ の絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}}$ はどのような構造をしているか, 特に, $G_{\mathbb{Q}}$ の商群としてどのような有限群が現れるか?

は代数的整数論における重要な問題の一つであるが, 未解決である.

2. 有限群のコホモロジーと Hilbert 90

定義

Galois 群 G と G 加群 M で定まる群コホモロジーを Galois コホモロジーとよぶ.

次は Galois コホモロジーに関する最も特徴的で重要な命題の一つである.

定理 (Hilbert 90)

K/k を Galois 拡大とし, その Galois 群を G とする. このとき

$$H^1(G, K^\times) = 0$$

が成り立つ.

3.1 Hilbert 94 と単項化定理

Hilbert 90 を用いて以下の定理が示される.

定理 (Hilbert 94)

k を代数体とする. K/k を n 次不分岐巡回拡大とすると, k の n 個以上のイデアル類に属する任意のイデアルが K で単項化する.

3. Hilbert 94 と単項化定理

3.1 Hilbert 94 と単項化定理

Hilbert 90 を用いて以下の定理が示される.

定理 (Hilbert 94)

k を代数体とする. K/k を n 次不分岐巡回拡大とすると, k の n 個以上のイデアル類に属する任意のイデアルが K で単項化する.

巡回拡大の条件を Abel 拡大へと一般化して考えてみよう.

3.1 Hilbert 94 と単項化定理

Hilbert 90 を用いて以下の定理が示される.

定理 (Hilbert 94)

k を代数体とする. K/k を n 次不分岐巡回拡大とすると, k の n 個以上のイデアル類に属する任意のイデアルが K で単項化する.

巡回拡大の条件を Abel 拡大へと一般化して考えてみよう.

$\to$ k を代数体とする. K/k を n 次不分岐 Abel 拡大とすると, k の n 個以上のイデアル類に属する任意のイデアルが K で単項化する.

3. Hilbert 94 と単項化定理

定義

代数体 k の最大不分岐 Abel 拡大 H/k を Hilbert 類体とよぶ.

3. Hilbert 94 と単項化定理

定義

代数体 k の最大不分岐 Abel 拡大 H/k を Hilbert 類体とよぶ.

Hilbert 類体は, 類体論からその存在が保証され, $\mathrm{Gal}(H/k) \cong \mathrm{Cl}(k)$ という性質を持つ.

3. Hilbert 94 と単項化定理

定義

代数体 k の最大不分岐 Abel 拡大 H/k を Hilbert 類体とよぶ.

Hilbert 類体は, 類体論からその存在が保証され, $\mathrm{Gal}(H/k) \cong \mathrm{Cl}(k)$ という性質を持つ.

$\to$ Abel 拡大へと一般化した主張が正しければ, この性質により次の単項化定理が成り立つ.

3. Hilbert 94 と単項化定理

定義

代数体 k の最大不分岐 Abel 拡大 H/k を Hilbert 類体とよぶ.

Hilbert 類体は, 類体論からその存在が保証され, $\mathrm{Gal}(H/k) \cong \mathrm{Cl}(k)$ という性質を持つ.

$\to$ Abel 拡大へと一般化した主張が正しければ, この性質により次の単項化定理が成り立つ.

定理 (単項化定理, Furtwängler (1930))

k を代数体とする. k の任意のイデアルは, k の Hilbert 類体において単項化する.

3. Hilbert 94 と単項化定理

定義

代数体 k の最大不分岐 Abel 拡大 H/k を Hilbert 類体とよぶ.

Hilbert 類体は, 類体論からその存在が保証され, $\mathrm{Gal}(H/k) \cong \mathrm{Cl}(k)$ という性質を持つ.

$\rightarrow$ Abel 拡大へと一般化した主張が正しければ, この性質により次の単項化定理が成り立つ.

定理 (単項化定理, Furtwängler (1930))

k を代数体とする. k の任意のイデアルは, k の Hilbert 類体において単項化する.

実際にこの結果は D. Hilbert によって予想され, 1930 年に Ph. Furtwängler により証明された.

3. Hilbert 94 と単項化定理

単項化定理の一般化について

単項化定理の一般化について

定理 (寺田の単項化定理 (1964))

K/k を不分岐巡回拡大とし，その Galois 群を $\mathrm{Gal}(K/k) = \langle\sigma\rangle$ とする．このとき $\mathfrak{a}^{\sigma-1} \in P_K$ を満たす K のイデアル $\mathfrak{a}$ は k の Hilbert 類体 K_1 で単項化する．

3. Hilbert 94 と単項化定理

単項化定理の一般化について

定理 (寺田の単項化定理 (1964))

K/k を不分岐巡回拡大とし，その Galois 群を $\mathrm{Gal}(K/k) = \langle\sigma\rangle$ とする．このとき $\mathfrak{a}^{\sigma-1} \in P_K$ を満たす K のイデアル $\mathfrak{a}$ は k の Hilbert 類体 K_1 で単項化する．

この定理は淡中忠郎氏によって予想され，寺田文行氏によって証明された (そのため淡中-寺田の単項化定理ともよばれる)．$K = k$ の場合が特に通常の単項化定理なので，確かに一般化になっているといえる．

3. Hilbert 94 と単項化定理

さらに寺田の単項化定理は次のように一般化される.

まず K を代数体 k の Hilbert 類体とし, K_1 を K の Hilbert 類体とする.

$$H = \mathrm{Gal}(K_1/k),\ H^{ab} = H/[H, H] = \mathrm{Gal}(K/k)$$

とおく. このとき Artin の相互律から $H^{ab} \cong \mathrm{Cl}_k$ である.

H の自己同型写像 α が与えられたとする. これは自然に H^{ab} の自己同型写像を定め, したがって Cl_k の自己同型写像を定める. これらも同様に α で表すことにする. さらに

$$\mathrm{Cl}_k^{[\alpha]} := \langle c^{\alpha} \cdot c^{-1} \mid c \in \mathrm{Cl}_k \rangle,\ \mathrm{Cl}_k^{\langle \alpha \rangle} := \langle c \in \mathrm{Cl}_k \mid c^{\alpha} = c \rangle$$

とおく.

鈴木浩志氏は, 以下を示した.

定理 (鈴木 (2001))

不分岐 Abel 拡大 K/k に対し, K のイデアル類群 Cl_K が

$$N_{K/k}(\mathrm{Cl}_K) \supset \mathrm{Cl}_k^{[\alpha]}$$

を満たせば, $\mathrm{Cl}_k^{\langle\alpha\rangle} \cap \mathrm{Ker}(j_{K/k} : \mathrm{Cl}_k \to \mathrm{Cl}_K)$ の位数は拡大次数 $[K:k]$ で割り切れる. ただし $j_{K/k}$ はイデアルの持ち上げによる写像である.

3. Hilbert 94 と単項化定理

鈴木浩志氏は, 以下を示した.

定理 (鈴木 (2001))

不分岐 Abel 拡大 K/k に対し, K のイデアル類群 Cl_K が

$$N_{K/k}(\mathrm{Cl}_K) \supset \mathrm{Cl}_k^{[\alpha]}$$

を満たせば, $\mathrm{Cl}_k^{\langle\alpha\rangle} \cap \mathrm{Ker}(j_{K/k} : \mathrm{Cl}_k \to \mathrm{Cl}_K)$ の位数は拡大次数 $[K : k]$ で割り切れる. ただし $j_{K/k}$ はイデアルの持ち上げによる写像である.

この定理において, 最初の自己同型写像を恒等写像ととれば定義から $\mathrm{Cl}_k^{[\alpha]} = \{1\}$, $\mathrm{Cl}_k^{\langle\alpha\rangle} = \mathrm{Cl}_k$ であり, さらに K を k の Hilbert 類体とれば単項化定理を与える.

鈴木浩志氏は, 以下を示した.

定理 (鈴木 (2001))

不分岐 Abel 拡大 K/k に対し, K のイデアル類群 Cl_K が

$$N_{K/k}(\mathrm{Cl}_K) \supset \mathrm{Cl}_k^{[\alpha]}$$

を満たせば, $\mathrm{Cl}_k^{\langle\alpha\rangle} \cap \mathrm{Ker}(j_{K/k} : \mathrm{Cl}_k \to \mathrm{Cl}_K)$ の位数は拡大次数 $[K : k]$ で割り切れる. ただし $j_{K/k}$ はイデアルの持ち上げによる写像である.

この定理において, 最初の自己同型写像を恒等写像ととれば定義から $\mathrm{Cl}_k^{[\alpha]} = \{1\}$, $\mathrm{Cl}_k^{\langle\alpha\rangle} = \mathrm{Cl}_k$ であり, さらに K を k の Hilbert 類体とれば単項化定理を与える.

$\to$ 少々難しい議論を挟むが, 修士論文では寺田の単項化定理と鈴木の単項化定理の関係についても触れている.

4.1 類体塔問題

問題 (類体塔問題)

$K = K_0$ を代数体とし, K_0 の Hilbert 類体を K_1 とする．さらに, K_1 の Hilbert 類体を K_2 とする．このように K_i の Hilbert 類体を K_{i+1} と表したとき, 体の拡大の昇鎖

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n \subset \cdots$$

は有限で停留するか?

4.1 類体塔問題

問題 (類体塔問題)

$K = K_0$ を代数体とし, K_0 の Hilbert 類体を K_1 とする. さらに, K_1 の Hilbert 類体を K_2 とする. このように K_i の Hilbert 類体を K_{i+1} と表したとき, 体の拡大の昇鎖

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n \subset \cdots$$

は有限で停留するか?

$\rightarrow$ 類体塔問題は Ph. Furtwängler により提唱された.

4. 類体塔問題

4.1 類体塔問題

問題 (類体塔問題)

$K = K_0$ を代数体とし, K_0 の Hilbert 類体を K_1 とする．さらに, K_1 の Hilbert 類体を K_2 とする．このように K_i の Hilbert 類体を K_{i+1} と表したとき, 体の拡大の昇鎖

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n \subset \cdots$$

は有限で停留するか?

$\rightarrow$ 類体塔問題は Ph. Furtwängler により提唱された.

$\rightarrow$ 類体塔問題が正しければ, 単項化定理より 1 番上の Hilbert 類体では K のイデアルだけでなくすべてのイデアルが単項化する.

4. 類体塔問題

類体塔問題は, 1964 年に E. S. Golod と I. R. Šhafarevič により反例

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17})$$

が与えられ, 否定的に解決された.

4. 類体塔問題

p を素数とする. k を代数体とし, その Hilbert 類体を K とする.

4. 類体塔問題

p を素数とする. k を代数体とし, その Hilbert 類体を K とする.

$\to$ 類体論と Galois 理論から $\mathrm{Gal}(K/k)$ の p-Sylow 群に対応する K/k の部分体 $K_{(p)}$ が存在する.

4. 類体塔問題

p を素数とする. k を代数体とし, その Hilbert 類体を K とする.

$\to$ 類体論と Galois 理論から $\mathrm{Gal}(K/k)$ の p-Sylow 群に対応する K/k の部分体 $K_{(p)}$ が存在する.

$\to$ この $K_{(p)}$ を Hilbert p 類体とよぶ.

4. 類体塔問題

p を素数とする. k を代数体とし, その Hilbert 類体を K とする.

$\rightarrow$ 類体論と Galois 理論から $\mathrm{Gal}(K/k)$ の p-Sylow 群に対応する K/k の部分体 $K_{(p)}$ が存在する.

$\rightarrow$ この $K_{(p)}$ を Hilbert p 類体とよぶ.

k の最大不分岐 pro-p 拡大を $\tilde{L}(k)/k$ とかく. さらにその Galois 群を $\tilde{G}(k) := \mathrm{Gal}(\tilde{L}(k)/k)$ とする.

4. 類体塔問題

p を素数とする. k を代数体とし, その Hilbert 類体を K とする.

$\rightarrow$ 類体論と Galois 理論から $\mathrm{Gal}(K/k)$ の p-Sylow 群に対応する K/k の部分体 $K_{(p)}$ が存在する.

$\rightarrow$ この $K_{(p)}$ を Hilbert p 類体とよぶ.

k の最大不分岐 pro-p 拡大を $\tilde{L}(k)/k$ とかく. さらにその Galois 群を $\tilde{G}(k) := \mathrm{Gal}(\tilde{L}(k)/k)$ とする.

$\rightarrow$ $\tilde{L}(k)$ は , k の Hilbert p 類体を積み重ねて得られることから p 類体塔ともよばれる.

4. 類体塔問題

p を素数とする. k を代数体とし, その Hilbert 類体を K とする.

→ 類体論と Galois 理論から $\mathrm{Gal}(K/k)$ の p-Sylow 群に対応する K/k の部分体 $K_{(p)}$ が存在する.

→ この $K_{(p)}$ を Hilbert p 類体とよぶ.

k の最大不分岐 pro-p 拡大を $\tilde{L}(k)/k$ とかく. さらにその Galois 群を $\tilde{G}(k) := \mathrm{Gal}(\tilde{L}(k)/k)$ とする.

→ $\tilde{L}(k)$ は , k の Hilbert p 類体を積み重ねて得られることから p 類体塔ともよばれる.

類体論により $\tilde{G}(k)$ の最大 Abel 商は k のイデアル類群の p-Sylow 部分群と同型となることから, 数論的情報を多く含むことが予想され, p 類体塔は古くから研究されている.

4. 類体塔問題

これに関連した問題として,

問題

代数体 k の円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大 k_∞ の p 類体塔 $\tilde{L}(k_\infty)/k_\infty$ は, どのような条件のもと Abel 拡大となるか.

という問題を考える.

これに関連した問題として,

問題

代数体 k の円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大 k_∞ の p 類体塔 $\tilde{L}(k_\infty)/k_\infty$ は, どのような条件のもと Abel 拡大となるか.

という問題を考える.

この問題は, p 類体塔の作り方から岩澤理論と関係している.

4. 類体塔問題

これに関連した問題として，

問題

代数体 k の円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大 k_∞ の p 類体塔 $\tilde{L}(k_\infty)/k_\infty$ は，どのような条件のもと Abel 拡大となるか．

という問題を考える．

この問題は，p 類体塔の作り方から岩澤理論と関係している．

$p=2$ の場合の虚 2 次体については 2010 年に水澤靖氏と尾崎学氏により決定されている．

定理 (水澤-尾崎 (2010))

虚 2 次体 k に対して，その円分的 $\mathbb{Z}_2$ 拡大体 k_∞ の最大不分岐 pro-2 拡大の Galois 群 $\tilde{G}$ が Abel 群となるための必要十分条件は，k の判別式の最大奇数因子 m が以下のいずれかのように素因数分解されることである:

定理 (水澤-尾崎 (2010))

$$m = \begin{cases} 1 & \\ q & (q \equiv 3 \pmod 8) \\ p & (p \equiv 5 \pmod 8) \\ q & (q \equiv 7 \pmod{16}) \\ pq & (p \equiv 5,\ q \equiv 3 \pmod 8) \\ q_1 q_2 & (q_1 \equiv q_2 \equiv 3 \pmod 8) \\ p & (p \equiv 9 \pmod{16},\ 2^{\frac{p-1}{4}} \equiv 1 \pmod p) \\ q_1 q_2 q_3 & (q_1 \equiv q_2 \equiv q_3 \equiv 3 \pmod 8) \\ pq & (q \equiv 3 \pmod 8,\ p \equiv 9 \pmod{16},\ 2^{\frac{p-1}{4}} \equiv 1 \pmod p) \\ q & (q \equiv 15 \pmod{32},\ P(-1) \equiv 1 \pmod 4)\ . \end{cases}$$

4. 類体塔問題

定理 (水澤-尾崎 (2010))

ここに p, q, q_i は奇素数を表し，$P(T) \in \mathbb{Z}_2[T]$ は岩澤加群 $X \cong \tilde{G}/[\tilde{G}, \tilde{G}]$ に付随する岩澤多項式である．

4. 類体塔問題

さらに岡野恵司氏によって p が奇素数の場合に拡張された.

定理 (岡野 (2006))

p を奇素数 , k を虚二次体, k_∞ を k の円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大, λ_k を K_∞/k の岩澤 λ 不変量とする. k_∞ の p 類体塔が Abel となる必要十分条件は, 次のいずれかがなりたつことである:

(a) $\lambda_k \leq 1$;

(b) $\lambda_k = 2$ かつ k のイデアル類群の p-Sylow 部分群が p の上の素イデアルの冪の類で生成される.

4. 類体塔問題

さらに岡野恵司氏によって p が奇素数の場合に拡張された.

定理 (岡野 (2006))

p を奇素数 , k を虚二次体, k_∞ を k の円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大, λ_k を K_∞/k の岩澤 λ 不変量とする. k_∞ の p 類体塔が Abel となる必要十分条件は, 次のいずれかがなりたつことである:

(a) $\lambda_k \leq 1$;

(b) $\lambda_k = 2$ かつ k のイデアル類群の p-Sylow 部分群が p の上の素イデアルの冪の類で生成される.

この λ_k については比較的初等的に計算する方法が知られている. 本論文では, 田谷久雄氏と福田隆氏の論文を参考に, その計算方法についても詳しく説明している.

4. 類体塔問題

さらに岡野恵司氏によって p が奇素数の場合に拡張された.

定理 (岡野 (2006))

p を奇素数，k を虚二次体, k_∞ を k の円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大, λ_k を K_∞/k の岩澤 λ 不変量とする. k_∞ の p 類体塔が Abel となる必要十分条件は, 次のいずれかがなりたつことである:

(a) $\lambda_k \leq 1$;

(b) $\lambda_k = 2$ かつ k のイデアル類群の p-Sylow 部分群が p の上の素イデアルの冪の類で生成される.

この λ_k については比較的初等的に計算する方法が知られている. 本論文では, 田谷久雄氏と福田隆氏の論文を参考に, その計算方法についても詳しく説明している.

今後は, まず岩澤理論についての学習を進め深く理解するとともに, 水澤氏と尾崎氏の結果や岡野氏の結果の一般化を模索していきたい.