中心的単純環の理論と中心的斜体に関する種々の問題について

長谷川　寿人

自然科学研究科数理物質科学専攻
博士前期課程 2 年

2017 年 2 月 9 日

イントロダクション

研究テーマ

体 k が与えられたとき，k 上の非可換体 K はどのくらいあるのか？

イントロダクション

研究テーマ

体 k が与えられたとき，k 上の非可換体 K はどのくらいあるのか？

$\longrightarrow$ その中でも $\underbrace{\text{最も非可換性の高いもの}}_{(k\text{ 上の中心的斜体})}$ について研究している

イントロダクション

研究テーマ

体 k が与えられたとき，k 上の非可換体 K はどのくらいあるのか？

$\longrightarrow$ その中でも $\underset{(k\text{ 上の中心的斜体})}{\underline{\text{最も非可換性の高いもの}}}$ について研究している

$\longrightarrow$ k のブラウアー群 $\mathrm{Br}(k)$ がその情報をもっている！

イントロダクション

例 (ブラウアー群の例)

- $k = \mathbb{C}$: 複素数体

  $\mathrm{Br}(\mathbb{C}) = \{[0]\} = \{[\mathbb{C}]\}$ (自明群) ($\leftarrow$ $\mathbb{C}$ 上の中心的斜体は $\mathbb{C}$ のみ)

イントロダクション

例 (ブラウアー群の例)

- $k = \mathbb{C}$: 複素数体

  $\mathrm{Br}(\mathbb{C}) = \{[0]\} = \{[\mathbb{C}]\}$ (自明群) ($\leftarrow$ $\mathbb{C}$ 上の中心的斜体は $\mathbb{C}$ のみ)
- $k = \mathbb{R}$: 実数体

  $\mathrm{Br}(\mathbb{R}) = \{[\mathbb{R}],\ [\mathbb{H}]\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($\leftarrow$ $\mathbb{R}$ 上の中心的斜体は $\mathbb{R}, \mathbb{H}$ のみ)
  ($\{1, i, j, k\}$: $\mathbb{H}$ の $\mathbb{R}$ 上の基底)

イントロダクション

例 (ブラウアー群の例)

- $k = \mathbb{C}$: 複素数体

  $\mathrm{Br}(\mathbb{C}) = \{[0]\} = \{[\mathbb{C}]\}$ (自明群) ($\leftarrow$ $\mathbb{C}$ 上の中心的斜体は $\mathbb{C}$ のみ)
- $k = \mathbb{R}$: 実数体

  $\mathrm{Br}(\mathbb{R}) = \{[\mathbb{R}],\ [\mathbb{H}]\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($\leftarrow$ $\mathbb{R}$ 上の中心的斜体は $\mathbb{R}, \mathbb{H}$ のみ)
  ($\{1, i, j, k\}$: $\mathbb{H}$ の $\mathbb{R}$ 上の基底)
- $k = \mathbb{F}_q$: 有限体

  $\mathrm{Br}(\mathbb{F}_q) = \{[\mathbb{F}_q]\}$ (自明群) ($\leftarrow$ $\mathbb{F}_q$ 上の中心的斜体は $\mathbb{F}_q$ のみ)

イントロダクション

例 (ブラウアー群の例)

- $k = \mathbb{C}$: 複素数体

  $\mathrm{Br}(\mathbb{C}) = \{[0]\} = \{[\mathbb{C}]\}$ (自明群) ($\leftarrow$ $\mathbb{C}$ 上の中心的斜体は $\mathbb{C}$ のみ)
- $k = \mathbb{R}$: 実数体

  $\mathrm{Br}(\mathbb{R}) = \{[\mathbb{R}],\ [\mathbb{H}]\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($\leftarrow$ $\mathbb{R}$ 上の中心的斜体は $\mathbb{R}, \mathbb{H}$ のみ)
  ($\{1, i, j, k\}$: $\mathbb{H}$ の $\mathbb{R}$ 上の基底)
- $k = \mathbb{F}_q$: 有限体

  $\mathrm{Br}(\mathbb{F}_q) = \{[\mathbb{F}_q]\}$ (自明群) ($\leftarrow$ $\mathbb{F}_q$ 上の中心的斜体は $\mathbb{F}_q$ のみ)
- $k = \mathbb{Q}_p$: p 進体

$$\mathrm{Br}(\mathbb{Q}_p) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \text{ (無限群)}$$

イントロダクション

例 (ブラウアー群の例)

- $k=\mathbb{C}$: 複素数体

  $\mathrm{Br}(\mathbb{C})=\{[0]\}=\{[\mathbb{C}]\}$ (自明群) ($\leftarrow$ $\mathbb{C}$ 上の中心的斜体は $\mathbb{C}$ のみ)
- $k=\mathbb{R}$: 実数体

  $\mathrm{Br}(\mathbb{R})=\{[\mathbb{R}],\ [\mathbb{H}]\}\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($\leftarrow$ $\mathbb{R}$ 上の中心的斜体は $\mathbb{R},\mathbb{H}$ のみ)
  ($\{1,i,j,k\}$: $\mathbb{H}$ の $\mathbb{R}$ 上の基底)
- $k=\mathbb{F}_q$: 有限体

  $\mathrm{Br}(\mathbb{F}_q)=\{[\mathbb{F}_q]\}$ (自明群) ($\leftarrow$ $\mathbb{F}_q$ 上の中心的斜体は $\mathbb{F}_q$ のみ)
- $k=\mathbb{Q}_p$: p 進体

  $$\mathrm{Br}(\mathbb{Q}_p)\simeq\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\ (\text{無限群})$$
- $k=\mathbb{Q}$: 有理数体

  $$\mathrm{Br}(\mathbb{Q})\simeq\left\{(a,x_p)\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus\bigoplus_{p:\text{素数}}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\ \middle|\ \frac{a}{2}+\sum_{p:\text{素数}}x_p=0\right\}$$

発表の流れ

1. 準備
2. 中心的単純環の理論
   - Wedderburn の構造定理
   - ブラウアー群
   - 分解体
   - 相対ブラウアー群とコホモロジーの関係
3. 中心的斜体に関する種々の問題と今後の研究課題
   - 同型問題
   - 巡回性問題

1. 準備

以下，k : 体とする．

$\mathrm{M}_n(k)$: k 上の n 次正方行列, K : k の拡大体
$\mathbb{H}$: ハミルトンの四元数体 ($k = \mathbb{R}$)
: k 上の多元環 ($\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ k 上の線形空間で積が定義されているもの)

A : k 上の多元環とする．(以下，有限次元のものだけを扱う)

定義 (中心的単純環)

A が k 上の中心的単純環
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
- $\mathrm{Z}(A) = k$ (k 上中心的)
- A の両側イデアルは $\{0\}$ と A のみ (単純)

一般に，中心的単純環の k 上の次元は必ず平方数になる．

定義 (次数)

$\deg(A) = \sqrt{\dim_k(A)}$: A の次数

2. 中心的単純環の理論

2.1 Wedderburn の構造定理

D : k 上の斜体 ($\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ k 上の多元環で 0 以外の元が逆元をもつもの)

例

D 上の行列環 $\mathrm{M}_n(D)$ は k 上の単純多元環である.

逆に，単純多元環に対し次が成り立つ.

定理 (Wedderburn の構造定理, 1907)

単純多元環 A に対し，

$$A \simeq \mathrm{M}_n(D) \ ({}^{\exists}D : k \text{ 上の斜体}).$$

さらに，上の斜体 D は同型を除き一意的に定まる.

とくに，A : 中心的単純環 $\Longrightarrow$ D は中心的斜体

2.2 ブラウアー群

A, B : k 上の中心的単純環
$\Longrightarrow A \simeq \mathrm{M}_n(D_A), B \simeq \mathrm{M}_m(D_B)$ ($^\exists D_A, D_B$: k 上の中心的斜体)

定義 (ブラウアー同値)

k 上の中心的単純環に対し，同値関係 $\sim$ を

$$A \sim B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} D_A \simeq D_B$$

で定める．このとき，A と B はブラウアー同値であるという．

2. 中心的単純環の理論

定義 (ブラウアー群 $\mathrm{Br}(k)$)

$\mathrm{Br}(k) = \{k$ 上の中心的単純環全体 $\}/\sim$ とし，演算を

$$[A] + [B] = [A \otimes B]$$

としてを定めると，$\mathrm{Br}(k)$ はこの演算に関し可換群の構造をもつ．
この $\mathrm{Br}(k)$ を体 k のブラウアー群という．
単位元は $[k]$，$[A]$ の逆元は $[A^\circ]$ である．
(A° : A の逆多元環 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ A に積を $a \circ b = ba$ で定義しなおしたもの)

注意

A, B : 中心的単純環 $\Longrightarrow$ $A \otimes B$: 中心的単純環

2. 中心的単純環の理論

定義 (ブラウアー群 $\mathrm{Br}(k)$)

$\mathrm{Br}(k) = \{k$ 上の中心的単純環全体 $\}/\sim$ とし，演算を

$$[A] + [B] = [A \otimes B]$$

としてを定めると，$\mathrm{Br}(k)$ はこの演算に関し可換群の構造をもつ．
この $\mathrm{Br}(k)$ を体 k の**ブラウアー群**という．
単位元は $[k]$，$[A]$ の逆元は $[A^\circ]$ である．
(A° : A の**逆多元環** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ A に積を $a \circ b = ba$ で定義しなおしたもの)

注意

A, B : 中心的単純環 $\Longrightarrow$ $A \otimes B$: 中心的単純環

$\rightarrow$ $\mathrm{Br}(k)$ は k 上の中心的斜体がどのくらいあるかを表している．

2. 中心的単純環の理論

例 ($\mathbb{R}$ のブラウアー群)

$k = \mathbb{R}$: 実数体

$$\mathrm{Br}(\mathbb{R}) = \{[\mathbb{R}],\ [\mathbb{H}]\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

このとき，$[\mathbb{H}]$ の位数が 2 であるから，

$$[\mathbb{H}] + [\mathbb{H}] = [\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}] = [\mathbb{R}] = [0] \text{ (単位元)}.$$

これは，

$$\mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \simeq \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$$

となることを表している．

2.3 分解体

A : k 上の中心的単純環，K : k の拡大体

$\Rightarrow A \otimes K$: K 上の中心的単純環

定義 (分解体)

$A \otimes K \simeq \mathrm{M}_n(K)$ となるとき，K は A の**分解体**であるという．
($\Leftrightarrow [A \otimes K] = [0]$)

K : k の拡大体が分解体になるかはブラウアー同値類に対して決まる．

2.4 相対ブラウアー群とコホモロジーの関係

定義 (相対ブラウアー群 $\mathrm{Br}(K/k)$)

K : k の拡大体

$$\mathrm{Br}(K/k) = \{[A] \in \mathrm{Br}(k) \mid A \text{ が } K \text{ で分解する}\} : \text{相対ブラウアー群}$$

一般に，k 上の中心的単純環は k 上のある有限次ガロア拡大で分解する

$$\longrightarrow \mathrm{Br}(k) = \bigcup_{K/k\,:\,\text{有限次ガロア拡大}} \mathrm{Br}(K/k)$$

K/k : 有限次ガロア拡大, $G = \mathrm{Gal}(K/k)$ とする.

定理 (相対ブラウアー群 $\mathrm{Br}(K/k)$ とコホモロジー群 $H^2(G, K^\times)$)

$$\mathrm{Br}(K/k) \simeq H^2(G, K^\times)$$

3. 中心的斜体に関する種々の問題と今後の研究課題

3.1 同型問題

問題 (同型問題)

D_1, D_2 : n 次の k 上の中心的斜体
このとき，D_1 と D_2 が同型かを D_1, D_2 の情報を使って判定できるか？

以下，D : k 上の中心的斜体, $\deg(D) = n$ とする．
一般に D の部分体 $K \supset k$ に対して次のことが成り立つ．

命題

以下は同値である．
(1) $[K : k] = n$ である．
(2) K は D の極大部分体である．
(3) K は D の分解体である．
とくに，D は必ず k 上 n 次の部分体を含む．

3. 中心的斜体に関する種々の問題と今後の研究課題

予想

D_1, D_2 : n 次の中心的斜体
このとき，$D_1 \simeq D_2 \Longleftrightarrow D_1, D_2$ が同じ極大部分体の族をもつ.

$\Longrightarrow$ が成り立つことはよい.

この予想について知られている結果：

3. 中心的斜体に関する種々の問題と今後の研究課題

予想

D_1, D_2 : n 次の中心的斜体
このとき, $D_1 \simeq D_2 \Longleftrightarrow D_1, D_2$ が同じ極大部分体の族をもつ.

$\Longrightarrow$ が成り立つことはよい.

この予想について知られている結果 :

- $n = 2$ のとき : k が代数体のときは Yes
  ($\because$ Albert-Brauer-Hasse-Noether の定理, 1932)

3. 中心的斜体に関する種々の問題と今後の研究課題

予想

D_1, D_2 : n 次の中心的斜体
このとき，$D_1 \simeq D_2 \Longleftrightarrow D_1, D_2$ が同じ極大部分体の族をもつ.

$\Longrightarrow$ が成り立つことはよい.

この予想について知られている結果 :

- $n = 2$ のとき : k が代数体のときは Yes
  ($\because$ Albert-Brauer-Hasse-Noether の定理, 1932)
  しかし，一般の k に対しては No
  (Rost, McKinnie, Wadsworth, Schacher, Goldstein etc., 1980s〜)

3. 中心的斜体に関する種々の問題と今後の研究課題

予想

D_1, D_2 : n 次の中心的斜体
このとき，$D_1 \simeq D_2 \Longleftrightarrow D_1, D_2$ が同じ極大部分体の族をもつ.

$\Longrightarrow$ が成り立つことはよい.

この予想について知られている結果 :

- $n = 2$ のとき : k が代数体のときは Yes
  ($\because$ Albert-Brauer-Hasse-Noether の定理, 1932)
  しかし，一般の k に対しては No
  (Rost, McKinnie, Wadsworth, Schacher, Goldstein etc., 1980s$\sim$)
- $n \geq 3$ のとき : k が代数体のときでも No

予想

D_1, D_2 : n 次の中心的斜体
このとき, $D_1 \simeq D_2 \Longleftrightarrow D_1, D_2$ が同じ極大部分体の族をもつ.

どうして成り立たないのかを考えてみる.
D : 中心的斜体 $\Longrightarrow D^\circ$ も D と同じ極大部分体をもつ.

予想

$D_1,\ D_2$: n 次の中心的斜体
このとき，$D_1 \simeq D_2 \iff D_1,\ D_2$ が同じ極大部分体の族をもつ.

どうして成り立たないのかを考えてみる.
D : 中心的斜体 $\Longrightarrow D^\circ$ も D と同じ極大部分体をもつ.
すると，予想が正しい $\Longrightarrow D \simeq D^\circ$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow [D] = [D^\circ] \\ &\Longrightarrow [D] = -[D] \\ &\Longrightarrow 2[D] = [0]. \end{aligned}$$

つまり，$[D]$ の位数が <u>2 でなくてはならない</u> ことがわかる.

3. 中心的斜体に関する種々の問題と今後の研究課題

予想

D_1, D_2 : n 次の中心的斜体
このとき，$D_1 \simeq D_2 \Longleftrightarrow D_1, D_2$ が同じ極大部分体の族をもつ.

今後の課題

D_1, D_2 : n 次の中心的斜体, $[D_1], [D_2]$ の位数は 2 とする.
このとき

$$D_1 \simeq D_2 \Longleftrightarrow D_1, D_2 \text{ が同じ極大部分体の族をもつ}$$

が成り立つか？

3.2 巡回性問題

＜巡回多元環＞
A : k 上の中心的単純環, $\deg(A) = n$ とする.

定義 (巡回多元環)

A が巡回多元環 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $A \supset {}^{\exists}K \supset k$: A の部分体 s.t. K/k : n 次巡回拡大

例 ($k = \mathbb{R}$)

$\mathbb{H}$: $\mathbb{R}$ 上の中心的単純環, $\deg(\mathbb{H}) = 2$
$\mathbb{R} \overset{2}{\subset} \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ より, $\mathbb{H}$: 巡回多元環

3. 中心的斜体に関する種々の問題と今後の研究課題

問題 (巡回性問題)

n 次の中心的斜体 D は巡回多元環になるか？

この問題について知られている結果：

3. 中心的斜体に関する種々の問題と今後の研究課題

問題 (巡回性問題)

n 次の中心的斜体 D は巡回多元環になるか？

この問題について知られている結果：

- $n = 2$ のとき：Yes ($\because$ D は k 上 2 次の部分体を含む)

問題 (巡回性問題)

n 次の中心的斜体 D は巡回多元環になるか？

この問題について知られている結果：

- $n = 2$ のとき：Yes ($\because$ D は k 上 2 次の部分体を含む)
- $n = 3$ のとき：Yes (Wedderburn, 1921)

3. 中心的斜体に関する種々の問題と今後の研究課題

問題 (巡回性問題)

n 次の中心的斜体 D は巡回多元環になるか？

この問題について知られている結果：

- $n = 2$ のとき：Yes ($\because$ D は k 上 2 次の部分体を含む)
- $n = 3$ のとき：Yes (Wedderburn, 1921)
- $n = 4$ のとき：No (Albert, 1933)

問題 (巡回性問題)

n 次の中心的斜体 D は巡回多元環になるか？

この問題について知られている結果：

- $n=2$ のとき：Yes ($\because$ D は k 上 2 次の部分体を含む)
- $n=3$ のとき：Yes (Wedderburn, 1921)
- $n=4$ のとき：No (Albert, 1933)
- $n=5$ のとき：？ (未解決)

3. 中心的斜体に関する種々の問題と今後の研究課題

定理 (Rowen-Saltman, 1982, Proc. Amer. Math. Soc.)

n : 奇数, $k \ni \zeta_n$ (ζ_n : 1 の原始 n 乗根) とする.
このとき, D がガロア群 D_n(位数 $2n$ の二面体群) の拡大で分解する
$\Rightarrow$ D は巡回多元環である.

証明の方針 :

3. 中心的斜体に関する種々の問題と今後の研究課題

定理 (Rowen-Saltman, 1982, Proc. Amer. Math. Soc.)

n : 奇数, $k \ni \zeta_n$ (ζ_n : 1 の原始 n 乗根) とする.
このとき, D がガロア群 D_n(位数 $2n$ の二面体群) の拡大で分解する
$\Rightarrow$ D は巡回多元環である.

証明の方針 :
n 乗して初めて k の元となる D の元 x をみつける

定理 (Rowen-Saltman, 1982, Proc. Amer. Math. Soc.)

n：奇数，$k \ni \zeta_n$ (ζ_n : 1 の原始 n 乗根) とする．
このとき，D がガロア群 D_n(位数 $2n$ の二面体群) の拡大で分解する
$\Rightarrow$ D は巡回多元環である．

証明の方針：
n 乗して初めて k の元となる D の元 x をみつける

$\Longrightarrow k(x) \subset D$ は k 上 n 次の巡回拡大体である (∵クンマー理論)

3. 中心的斜体に関する種々の問題と今後の研究課題

定理 (Rowen-Saltman, 1982, Proc. Amer. Math. Soc.)

n：奇数，$k \ni \zeta_n$ (ζ_n：1 の原始 n 乗根) とする．
このとき，D がガロア群 D_n(位数 $2n$ の二面体群) の拡大で分解する
$\Rightarrow$ D は巡回多元環である．

証明の方針：
n 乗して初めて k の元となる D の元 x をみつける

$\Longrightarrow$ $k(x) \subset D$ は k 上 n 次の巡回拡大体である (∵クンマー理論)

$\Longrightarrow$ D は巡回多元環である．

とくに $n = 5$ の場合，$k \not\ni \zeta_5$ の場合も成り立つことが示されている．
(E. Matzri, 2008, Proc. Amer. Math. Soc.)

3. 中心的斜体に関する種々の問題と今後の研究課題

定理 (Rowen-Saltman, 1982, Proc. Amer. Math. Soc.)

n : 奇数，$k \ni \zeta_n$ (ζ_n : 1 の原始 n 乗根) とする．
このとき，D がガロア群 D_n(位数 $2n$ の二面体群) の拡大で分解する
$\Rightarrow$ D は巡回多元環である．

今後の課題

一般の奇数 n に対し $k \ni \zeta_n$ の仮定が外せるか？

F : 1 の n 乗根を含まない体

$$\overbrace{F(\zeta_n) \supset F(\zeta_n + \zeta_n^{-1})}^{2} \supset F$$

$\longrightarrow$ 最初の段階として "$k \ni \zeta_n$" を "$k \ni \zeta_n + \zeta_n^{-1}$" にゆるめられるか？