修 士 論 文

Kohnen-Zagier 公式の一般化について

小川紘平

新潟大学自然科学研究科博士前期課程

数理物質科学専攻

目次

概要

本論文は筆者が修士のセミナーで学んできた Weil の逆定理・志村対応・Kohnen-Zagier 公式などの保型形式の理論の紹介に加えて，Kohnen-Zagier 公式の一般化に関する坂田裕氏の論文 [Sak08] について概説したものである．各定理や命題の証明については概説を行うか，文献のページを明記しているので，参考にしていただきたい．

保型形式とは古くは 19 世紀以前から研究されてきた対象である．当時はテータ関数や Dedekind のイータ関数などのよく知られた保型形式から，Jacobi の三重積公式などの関係式を示したように，楕円関数論との関連物として用いられていることが多かった．その後，1925 年頃に E. Hecke らによって重さ整数の保型形式の一般論が定式化された．しかし，テータ関数や Dedekind のイータ関数の持つ変換公式の重さは一般に整数ではなく，半整数であった．したがって，これらと似た変換を持つ関数も系統的に扱うことのできる枠組みとして，重さ半整数の保型形式の定式化が試みられた．しかしながら，当時は“うまく”定式化をすることは果たされず，1936 年に Hecke は「特別な場合を除いて重さ整数の保型形式と同様のことを示すことは不可能である」と指摘した．

その後，1970 年頃，志村五郎氏が [Shim73] によって，これまでの保型形式を Metaplectic 群上の保型形式と捉えなおすことで，このような関数も含んだ重さ半整数の保型形式の一般論を定式化することに成功した．更に，志村氏は重さ $k+\dfrac{1}{2}$ の指標 ψ 付きの正規化された Hecke 固有形式 $g(z)$ から，Hecke 作用素に関する固有値が $g(z)$ と同じである重さ $2k$ の保型形式 $f(z)$ を構成した．これは志村対応と呼ばれている．志村対応は重さ半整数の保型形式の理論が，重さ整数の理論の間に“美しい”対応があることを示しており，重さ半整数の場合に重さ整数の場合に用いられる概念と同様なものが定義できるかどうかを調べるきっかけとなった．

また，対応する $f(z)$ と $g(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c(n)q^n$ は，

$$L(s+1-k,\phi)\sum_{n=1}^{\infty} c(tn^2)n^{-s} = c(t)L(s,f)$$

という関係を持っていた．（ここで，$\phi(n)=\psi(n)\left(\dfrac{-1}{n}\right)\left(\dfrac{t}{n}\right)$ である．）上の式は「保型形式の Fourier 係数 $c(n)$ と保型 L 関数 $L(s,f)$ の間には何らかの関係がある」と解釈することができる．実際その関係の 1 つの例として，1980 年に B. Gross と D. Zagier は [GZ80] によって $L(s,f)$ の関数等式の中心 $s=k$ での値は完全平方になることを示した．その後，$c(n)$ と $L(s,f)$ の間の関係の具体的な記述や，なぜ $L(k,f)$ が完全平方になるかということが調べられた．

この問題に対して，J.-L. Waldspurger は [Wal81] によって

$L(s,f)$ の‘ツイスト’の $s=k$ での値は，本質的には $c(n)^2$ である

ということを示した．しかし，その証明は表現論的手法を用いた難解なものであった．更に‘ツイ

スト’の特殊値と $c(n)^2$ の間の比例定数が $\{\mathbb{Q}_p^{\times 2}\}_{p|N}$ で決まることはわかっていたが，具体的な値はわかっていなかった．この比例定数を $SL_2(\mathbb{Z})$ 上の特別な保型形式の場合に具体的に記述したものが W. Kohnen と D. Zagier [KZ81] による Kohnen-Zagier 公式であり，本論文の主題である．

しかし，Kohnen-Zagier 公式の証明には‘重複度 1’が成り立つことが重要であるが，4 より大きいレベルに関しては一般にこれは成立しない．この一般レベルの場合の問題を部分的に解決した論文として小嶋久祉氏の論文 [Koj99] や坂田裕氏の論文 [Sak05]，[Sak08] などがあるが，最も一般的な状況で書かれた論文が [Sak08] である．

本論文は，3 つの章からなる．第 1 章では Koblitz の教科書 [Kob93] を基に重さ整数の保型形式と重さ半整数の保型形式の定義や Hecke 作用素などの基礎事項や重要な具体例についてまとめた．そのため本論文では志村氏の教科書 [Shim71] などの様に Fuchs 群は考えず，$SL_2(\mathbb{Z})$ とその合同部分群の場合について議論していることに注意しておく．第 2 章でははじめの 2 節は三宅敏恒氏の教科書 [Miy06] を基に Weil の逆定理について述べ，残りの 2 節は志村氏の論文 [Shim73] を基に志村対応について述べる．[上田] や [坂田]，[成田] などは本論文を書く上で非常に参考になった．ぜひ合わせて参照していただきたい．まず 2.1 節では L 関数の絶対収束性を示す際などの基本事項となる，保型形式の Fourier 級数の増大度についてまとめた．2.2 節では [Shim73] の中で実際に志村対応を示すのに用いる基本的なアイデアとなっている Weil の逆定理についてまとめた．2.3 節で志村対応を示す際に用いる球関数付きテータ関数を準備し，2.4 節で論文 [Shim73] の主定理について概説を行う．第 3 章では本論文の目標である坂田氏の論文 [Sak08] による Kohnen-Zagier 関係式の一般化について述べる．まず 3.1 節で Kohnen-Zagier 関係式がどんなものであったかを確認する．3.2 節では記号の準備を行い，3.3 節で [Sak08] の主定理の証明を紹介する．

謝辞

指導教員である星明考先生には学部 3 年生から 4 年間にわたり，研究室のセミナーで丁寧に指導していただき，多くの助言をいただきました．また本論文の作成に関しても，様々な有益なご意見をいただきました．ここに深く感謝を申し上げます.

また，先輩である同じ星研究室の金井和貴氏，長谷川寿人氏，および小島研究室の長峰孝典氏には，学部の頃からセミナーなどを見ていただき，数多くのアドバイスをいただきました．心より感謝を申し上げます．また，研究室の同期である小柴将和氏には，たびたび数学的な議論を行ったり，様々な相談事にのったりしていただきました．同じく心から感謝を申し上げます.

最後に，私を支えてくれた両親および多くの方々に，心から感謝の意を申し上げます.

記号

- $\mathbb{N}$: 自然数全体の集合
- $\mathbb{Z}$: 整数全体の集合
- $\mathbb{Q}$: 有理数全体の集合
- $\mathbb{R}$: 実数全体の集合
- $\mathbb{C}$: 複素数全体の集合
- $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$: 複素上半平面
- $q = \boldsymbol{e}(z) = \exp(2\pi i z)$
- $\mathit{\Gamma} = SL_2(\mathbb{Z})$
- $\mathit{\Gamma}_0(N) = \left\{ \gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathit{\Gamma} \,\middle|\, c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$ (p. 11, 定義 1.10)
- $\mathit{\Gamma}_1(N) = \left\{ \gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathit{\Gamma}_0(N) \,\middle|\, a \equiv 1 \pmod{N} \right\}$ (p. 11, 定義 1.10)
- $\mathit{\Gamma}(N) = \left\{ \gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathit{\Gamma}_1(N) \,\middle|\, b \equiv 0 \pmod{N} \right\}$ (p. 11, 定義 1.10)
- $\widetilde{\mathit{\Gamma}'}$ (p. 14, 定義 1.23)
- $M_k(\mathit{\Gamma})$: $\mathit{\Gamma}$ に対する重さ k の保型形式全体 (p. 9, 定義 1.6)
- $S_k(\mathit{\Gamma})$: $\mathit{\Gamma}$ に対する重さ k の cusp 形式全体 (p. 9, 定義 1.6)
- $M_k(\mathit{\Gamma}')$: 合同部分群 $\mathit{\Gamma}'$ に対する重さ k の保型形式全体 (p. 11, 定義 1.13)
- $S_k(\mathit{\Gamma}')$: 合同部分群 $\mathit{\Gamma}'$ に対する重さ k の cusp 形式全体 (p. 11, 定義 1.13)

- $M_k(N,\chi)$: 指標 χ 付き重さ k の保型形式全体 (p. 12, 定義 1.16)

- $S_k(N,\chi)$: 指標 χ 付き重さ k の cusp 形式全体 (p. 12, 定義 1.16)

- $M_{k+\frac{1}{2}}(\widetilde{\Gamma_0(N)})$: $\Gamma_0(N)$ に対する重さ $k+\frac{1}{2}$ の保型形式全体 (p. 15, 定義 1.25)

- $S_{k+\frac{1}{2}}(\widetilde{\Gamma_0(N)})$: $\Gamma_0(N)$ に対する重さ $k+\frac{1}{2}$ の cusp 形式全体 (p. 15, 定義 1.25)

- $M_{k+\frac{1}{2}}(N,\chi)$: $\Gamma_0(N)$ に対する指標 χ 付き重さ $k+\frac{1}{2}$ の保型形式全体 (p. 15, 定義 1.26)

- $S_{k+\frac{1}{2}}(N,\chi)$: $\Gamma_0(N)$ に対する指標 χ 付き重さ $k+\frac{1}{2}$ の cusp 形式全体 (p. 15, 定義 1.26)

- $M^+_{k+\frac{1}{2}}(N)$: Kohnen plus 空間 (p. 40, 定義 3.1)

- $S^+_{k+\frac{1}{2}}(N)$: cusp 形式のなす Kohnen plus 空間 (p. 40, 定義 3.1)

- $M^+_{k+\frac{1}{2}}(N,\chi)$: 指標 χ 付き Kohnen plus 空間 (p. 40, 定義 3.2)

- $S^+_{k+\frac{1}{2}}(N,\chi)$: cusp 形式のなす指標 χ 付き Kohnen plus 空間 (p. 40, 定義 3.2)

- $S^{\mathrm{new}}_{2k}(N)$: 重さ $2k$ の newform のなす空間 (p. 43, 定義 3.10)

- $\mathfrak{O}^+_{k+\frac{1}{2}}(N)$: 重さ $k+\frac{1}{2}$ の oldform のなす空間 (p. 43, 定義 3.12)

- $\mathfrak{N}^+_{k+\frac{1}{2}}(N)$: 重さ $k+\frac{1}{2}$ の newform のなす空間 (p. 43, 定義 3.12)

- T_n : 重さ整数の保型形式の Hecke 作用素 (p. 18, 定義 1.32)

- $\widetilde{T}_{n^2}$: 重さ整数の保型形式の Hecke 作用素 (p. 18, 定義 1.34)

- $\langle\ ,\ \rangle$: Petersson 内積 (p. 19, 定義 1.38)

- $L(s;f)$ (p. 22, 定義 2.7)

- $\Lambda(s;f)$ (p. 22, 定義 2.7)

- $f_\psi(z)$ (p. 24, 定義 2.13)

- $L(s;f,\psi)$ (p. 24, 定義 2.13)

- $\Lambda_N(s;f,\psi)$ (p. 24, 定義 2.13)

- $G_k(z)$: 重さ k の Eisenstein 級数 (p. 10, 定義 1.8)
- $E_k(z)$: 重さ k の正規化された Eisenstein 級数 (p. 10, 定義 1.8)
- δ_m (p. 42, 定義 3.6)
- $U(m)$: shift 作用素 (p. 42, 定義 3.6)
- R_m : twisting 作用素 (p. 42, 定義 3.6)
- W_Q : Atkin-Lehner 作用素 (p. 42, 定義 3.7)
- $r_{k,N}(f; D, (-1)^k m)$: $\mathcal{Q}_{N,\Delta}/\Gamma_0(N)$ に関連する周期 (p. 45, 定義 3.16)
- $\mathcal{S}_{k,N,D}$: D-志村対応 (p. 46, 定義 3.17)
- $\mathcal{S}^*_{k,N,D}$: D-新谷対応 (p. 46, 定義 3.19)

第 1 章

保型形式の定義と諸性質

この章では教科書 Koblitz [Kob93] にしたがって，重さ整数および重さ半整数の保型形式の定義や基礎事項を述べる．本章については証明は基本的に割愛することとするが，代わりに定理や命題には [Kob93] のページを明記するので，そちらを見てほしい．

1.1　$\mathit{\Gamma}$ に対する保型形式

以下，k を整数, N を自然数とし，$\mathbb{H}$ で上半平面を表すとする．つまり，

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

である．また，

$$\begin{aligned} \mathit{\Gamma} &= SL_2(\mathbb{Z}) \\ &= \left\{ \gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, \det(\gamma) = 1 \right\} \end{aligned}$$

とする．

まず，$\mathit{\Gamma}$ の上半平面 $\mathbb{H}$ への作用を定義し，基本領域と cusp を定義する．

定義 1.1 (一次分数変換)

$\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$ は $z \in \mathbb{C}$ に対して一次分数変換で作用するものとする．つまり，

$$\gamma z = \frac{az+b}{cz+d}$$

と定める．また，γ の ∞ への作用を

$$\gamma\infty = \frac{a}{c}$$

で定める．

注意 1.2

定義から $\mathit{\Gamma}$ は $\overline{\mathbb{H}} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ に作用する．実際，以下が成り立つ：

$$\mathrm{Im}(\gamma z) = \mathrm{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{\left|cz+d\right|^2}\right) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{\left|cz+d\right|^2}$$

この作用の下，基本領域と cusp を定義する．

定義 1.3（基本領域）

群 G が集合 S に対して作用しているとする．このとき，S の 2 点 s_1，s_2 に対して $s_1 = gs_2$ となる $g \in G$ が存在するとき，s_1 と s_2 は G 同値であるという．
また，$\mathbb{H}$ 内の閉領域 F が

(1) $\mathbb{H}$ の任意の点 z は F のある点と $\mathit{\Gamma}$ 同値である，
(2) F の任意の異なる二つの内点は $\mathit{\Gamma}$ 同値ではない

という 2 条件を満たすとき，F を $\mathit{\Gamma}$ の**基本領域**という．

注意 1.4

多くの本では，基本領域の定義の 2 条件目を

“F の任意の異なる 2 点は $\mathit{\Gamma}$ 同値ではない”

としているが，今回の定義とあまり大差はない．実際，2 点とも境界上にある場合のみ $\mathit{\Gamma}$ 同値になる可能性があるだけである．

定義 1.5（cusp）

$z \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ を **cusp**（**尖点**）と呼ぶ．$\mathit{\Gamma}$ は $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ に作用するから，$\mathit{\Gamma}$ 同値類も $\mathit{\Gamma}$ の cusp と呼ぶ.

任意の有理数 $\dfrac{a}{c}$ に対し，$\gamma\infty = \dfrac{a}{c}$ となる $\gamma \in \Gamma$ が存在するから，$\mathit{\Gamma}$ の cusp は $[\infty]$ の一つである．（[ ] で $\mathit{\Gamma}$ 同値類を表す.）

さて，ここで $\mathit{\Gamma}$ の保型形式を定義する．まずは定義がどのようなものかを述べ，定義されていない用語については後述することとする．

定義 1.6（保型形式・cusp 形式の定義）

f を $\mathbb{H}$ 上の有理型関数とする．このとき，f が $\mathit{\Gamma}$ に対する**重さ k の保型関数**であるとは，任意の $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$ に対し，

$$f(\gamma z) = (cz+d)^k f(z) \tag{1.1}$$

を満たし，かつ f は ∞ で有理型であることをいう．さらに，保型関数 f が**重さ k の保型形式**（resp. **cusp 形式**（**尖点形式**））であるとは，f は $\mathbb{H}$ 上正則であり，かつ f は ∞ で正則である（resp. 消えている）ことをいう．

また，$M_k(\mathit{\Gamma})$, $S_k(\mathit{\Gamma})$ でそれぞれ $\mathit{\Gamma}$ に対する重さ k の保型形式全体，$\mathit{\Gamma}$ に対する重さ k の cusp 形式全体を表すこととする．

以下，簡単のために $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対し，以下のように略記する：

$$f(z)\Big|[\gamma]_k \overset{\mathrm{def}}{=} (cz+d)^{-k} f(\gamma z).$$

この記号を用いれば式 1.1 は

$$f(z)\Big|[\gamma]_k = f(z)$$

と書くこともできる．

さてここで，定義 1.6 で用いた "∞ で有理型"，"∞ で正則"，"∞ で消えている" という用語について定義する．まず，Γ に対する保型関数 f は周期関数になる．実際，式 1.1 において $\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とすれば，

$$f(z+1) = f(z)$$

という式が得られるから，f は周期 1 の周期関数である．よって f は $f(z) = \sum_n a(n)q^n$ という Fourier 展開を持つ．この展開を用いて，∞ での状況を定義する．

定義 1.7 (cusp 条件)
式 1.1 を満たす有理型関数 f が ∞ で**有理型**であるとは，f の Fourier 展開の負冪の項の係数が有限個を除いて 0 であることをいう．また ∞ で**正則**であるとは f の Fourier 展開の負冪の項の係数がすべて 0 であることをいい，∞ で**消えている**とは f の Fourier 展開の冪が 0 以下の項の係数がすべて 0 であることをいう．

少し具体例を見ていく．

例 1.8 (Eisenstein 級数, [Kob93, pp. 109–111])
4 以上の偶数 k に対し，

$$G_k(z) \overset{\text{def}}{=} \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(mz+n)^k} \in M_k(\Gamma) \tag{1.2}$$

である．ここで $\sum_{m,n}{}'$ は $(m,n) \neq (0,0)$ 以外のすべての整数の組を渡る和である．$G_k(z)$ を **Eisenstein 級数**と呼ぶ．また，$G_k(z)$ は

$$G_k(z) = 2\zeta(k)\left(1 - \frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n\right)$$

という関係式を持つ．ここで $\zeta(s)$ は Riemann の ζ 関数，B_k は k 番目の Bernoulli 数，$q = e^{2\pi iz}$ であり，

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$$

である．この関係式から，**正規化された Eisenstein 級数**

$$E_k(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\zeta(k)}G_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n \tag{1.3}$$

が得られる．

例 1.9 (Ramanujan の Δ 関数, [Kob93, p. 112])

$$\Delta(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{(2\pi)^{12}}{1728}(E_4(z)^3 - E_6(z)^2) \in S_{12}(\Gamma) \tag{1.4}$$

である．Δ を **Ramanujan の Δ 関数**と呼ぶ．

1.2 合同部分群に関する保型形式

1.1 節では Γ に関する保型形式を定義した．この節では合同部分群に対する保型形式を定義する．

まず始めに，合同部分群と呼ばれる Γ の部分群について定義する．

定義 1.10（合同部分群）

Γ の部分群 $\Gamma_0(N)$，$\Gamma_1(N)$，$\Gamma(N)$ を以下のように定義する：

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma \,\middle|\, c \equiv 0 \bmod N \right\};$$
$$\Gamma_1(N) = \left\{ \gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_0(N) \,\middle|\, a \equiv 1 \bmod N \right\};$$
$$\Gamma(N) = \left\{ \gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_1(N) \,\middle|\, b \equiv 0 \bmod N \right\}.$$

また，$\Gamma(N)$ を含む Γ の部分群を**レベル N の合同部分群**という．

合同部分群 Γ' に対しても定義 1.3 や定義 1.5 と同様に，基本領域と cusp が定義される．cusp については $\left|\Gamma : \Gamma'\right| < \infty$ が成立することから，Γ' の cusp は有限個であることがわかる．

少し，合同部分群の cusp の例を見ていく．

例 1.11

$\Gamma(2)$ の cusp は $[\infty]$，$[0]$，$[-1]$ の 3 つである．

例 1.12

素数 p に対し，$\Gamma(p)$ の cusp は $[\infty]$，$[0]$ の 2 つである．

1.1 節と同様に，まずは合同部分群に関する保型形式の定義がどんなものか確認する．

定義 1.13（合同部分群に関する保型形式・尖点形式）

f を $\mathbb{H}$ 上の有理型関数とし，Γ' をレベル N の合同部分群とする．このとき．f が **Γ' に関する重さ k の保型関数**であるとは，f は任意の $\gamma' \in \Gamma'$ に対し，

$$f\Big|[\gamma']_k = f \tag{1.5}$$

を満たし，すべての cusp で有理型であることをいう．また，保型関数 f が**保型形式**（resp. **cusp 形式**）であるとは，f が $\mathbb{H}$ 上正則であり，すべての cusp で正則である（resp. 消えている）ことをいう．

また，$M_k(\Gamma')$，$S_k(\Gamma')$ でそれぞれ Γ' に関する重さ k の保型形式全体，Γ' に関する重さ k の cusp 形式全体を表すこととする．

さて，今回も cusp 条件について考察していく．1.1 節でみたように Γ に関する保型形式は周期 1 の周期関数であった．似たようにレベル N の合同部分群 Γ' に関する保型形式は周期 N の周期関数になる．実際，Γ に関する保型形式のときと似たように $\gamma = \begin{bmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ と取ることで確認できる．よって Γ' に関する保型形式 f は Fourier 展開を持つが，cusp の代表元の取り方によってその

Fourier 係数の値は少しだけ異なる．cusp 条件を正確に定義するために，まずはこの“Fourier 係数の値の差異”について確認する．

命題 1.14 ([Kob93, p. 126, Proposition 16])

f をレベル N の合同部分群 Γ' に関する重さ k の保型形式とし，γ_1，$\gamma_2 \in \Gamma$ に対し，$\gamma_1\infty = \gamma'\gamma_2\infty$ となる $\gamma' \in \Gamma'$ が存在するとする．このとき，f の γ_1，γ_2 に関する Fourier 展開をそれぞれ

$$f(z)\Big|[\gamma_1]_k = \sum_n a(n)q_N^n,$$
$$f(z)\Big|[\gamma_2]_k = \sum_m b(m)q_N^m$$

とすると，

$$\min\{n \mid a(n) \neq 0\} = \min\{m \mid b(m) \neq 0\}$$

が成り立つ．ここで，$q_N = e^{\frac{2\pi iz}{N}}$ である．

これにより，定義 1.7 と似たように合同部分群に関する保型形式の cusp での状況が定義できる．

定義 1.15 (合同部分群の cusp 条件)

式 1.5 を満たす $\mathbb{H}$ 上の有理型関数 f が Γ' の cusp $s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ で**有理型**であるとは，f の Fourier 展開の負冪の項の係数が有限個を除いて 0 であることをいう．また cusp $s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ で**正則**であるとは f の Fourier 展開の負冪の項の係数がすべて 0 であることをいい，cusp $s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ で**消えている**とは f の Fourier 展開の冪が 0 以下の項の係数がすべて 0 であることをいう．

最後に指標付き重さ整数の保型形式について述べ，この節を終わることとする．

定義 1.16 (指標付き重さ整数の保型形式)

mod N の Dirichlet 指標 χ に対し，

$$M_k(N,\chi) = \left\{ f \in M_k(\Gamma_1(N)) \,\middle|\, f\Big|[\gamma]_k = \chi(d)f \ \left(\forall\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_0(N)\right) \right\},$$
$$S_k(N,\chi) = M_k(N,\chi) \cap S_k(\Gamma_1(N))$$

と定義する．

$M_k(N,\chi)$ に関して，次の 2 つの重要な命題が成り立つ：

命題 1.17 ([Kob93, pp. 137–138, Proposition 28])

$$M_k(\Gamma_1(N)) = \bigoplus_\chi M_k(N,\chi)$$

が成り立つ．

命題 1.18 ([Kob93, pp. 127–129, Proposition 17])

次の 2 つのことが成立する：

(1) M を自然数とする．$f \in M_k(\Gamma_0(N))$ (resp. $M_k(\Gamma_1(N))$，$M_k(\Gamma(N))$) に対し，$g(z) = f(Mz)$ とすると，$g \in M_k(\Gamma_0(MN))$ (resp. $M_k(\Gamma_1(MN))$，$M_k(\Gamma(MN))$) である．さらに f が cusp 形式であれば，g も cusp 形式である；

(2) χ を mod N の Dirichlet 指標，ϕ を mod M の Dirichlet 指標とし，ϕ の導手を M_ϕ とする．$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q_N^n \in M_k(N,\chi)$ に対し，$f_\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)\phi(n)q_N^n$ とすると，$f_\phi \in M_k(M', \chi\phi^2)$ である．ここで，$M' = \mathrm{lcm}(M_\phi, N^2)$ である．さらに f が cusp 形式であれば，f_ϕ も cusp 形式である．

1.3 重さ半整数の保型形式

これまで重さ整数の保型形式について定義をした．この節では重さ半整数の保型形式について定義する．

以下，Γ' を $\Gamma_0(4)$ の部分群とし，$T = \{\pm 1, \pm i\}$ とする．（Fuchs 群や重さが分数の保型形式を考える際は T として 1 の冪根全体をとったり，円周群をとることもあるが，今回はこれで十分である．Fuchs 群や重さが分数の保型形式については志村氏の教科書 [Shim71] や [伊吹山] などが詳しい．）また $z \in \mathbb{C}$ に対し，$\sqrt{z}$ は 2 乗すれば z になる複素数のうち，偏角を $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ に持つものを表すこととする．

ここで重さ整数のときの様に $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma'$ に対する保型因子を

$$J(\gamma, z) = (cz+d)^{\frac{k}{2}}$$

として定めてしまいたいが，実はこれではうまくいかない．$\sqrt{z}$ は偏角の取り方が決まっているから，保型因子の満たすべき関係式

$$J(\alpha\beta, z) = J(\alpha, \beta z)J(\beta, z)$$

が一般には成立しない．そのため，保型因子の定義を偏角の取り方にあわせて少し修正し，さらに“被覆群”というものを考え，その差異を判別できるようにすることで，重さ半整数の保型形式をうまく定義する．まずより一般に，$GL_2^+(\mathbb{Q}) \overset{\mathrm{def}}{=} \{\gamma \in GL_2(\mathbb{Q}) \mid \det\gamma > 0\}$ の被覆群を考える．

定義 1.19 ($GL_2^+(\mathbb{Q})$ の被覆群)

$$G = \left\{ (\alpha, \phi(z)) \,\middle|\, \alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{Q}),\ \phi \text{は } \mathbb{H} \text{ 上の正則関数で}, \phi(z)^2 = t\frac{cz+d}{\sqrt{\det\alpha}}\ (t \in T) \right\}$$

と定める．また集合 G に対し，積を

$$(\alpha, \phi(z))(\beta, \psi(z)) = (\alpha\beta, \phi(\beta z)\psi(z))$$

と定めると，G は群となる．（このことは [Kob93, p. 179, Proposotion 1] を見てほしい．）

群 G は上半平面 $\mathbb{H}$ に行列成分のみ一次分数変換で作用する．つまり，G の元 $\xi = (\alpha, \phi(z))$ と上半平面 $\mathbb{H}$ の点 z に対し，$\xi z \overset{\mathrm{def}}{=} \alpha z$ と定める．∞ に対しても，$\xi\infty \overset{\mathrm{def}}{=} \alpha\infty$ と定める．

この状況下で，重さ整数の場合と似たように $\Big|[\ ]_{\frac{k}{2}}$ という記号を定義する．

定義 1.20
$\xi = (\alpha, \phi(z)) \in G$ に対し,

$$f\Big|[\xi]_{\frac{k}{2}} = f(\alpha z)\phi(z)^{-k}$$

と定める.

この記号の元，ξ_1，$\xi_2 \in G$ に対し，$f\Big|[\xi_1\xi_2]_{\frac{k}{2}} = \left(f\Big|[\xi_1]_{\frac{k}{2}}\right)\Big|[\xi_2]_{\frac{k}{2}}$ が成立することが確認できる.
次に保型因子を定義する．まず，Jacobi 記号について定義しておく.

定義 1.21 (拡張された Jacobi 記号)
$\varphi_m(n)$ を次のように定義する：

(1) 素数 p と整数 n に対し，$\varphi_p(n) = \begin{cases} 1 & ((n,p)=1 \text{ かつ } n \text{ は } \mathrm{mod}\ p \text{ の平方剰余}), \\ -1 & ((n,p)=1 \text{ かつ } n \text{ は } \mathrm{mod}\ p \text{ の平方非剰余}), ; \\ 0 & ((n,p)>1); \end{cases}$

(2) 自然数 m の素因数分解を $m = p_1^{e_1}\cdots p_r^{e_r}$ としたとき, $\varphi_m(n) = \varphi_{p_1}(n)^{e_1}\cdots\varphi_{p_r}(n)^{e_r}$;

(3) 負の整数 m に対して，$\varphi_m(n) = \begin{cases} \varphi_{|m|}(n) & (n>0), \\ -\varphi_{|m|}(n) & (n<0). \end{cases}$

$\varphi_m(n)$ を**拡張された Jacobi 記号**という.

この記号を用いて，保型因子を次のように定義する.

定義 1.22 (保型因子)
$\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_0(4)$ と $z \in \mathbb{H}$ に対し，**保型因子** $J(\gamma, z)$ を

$$J(\gamma, z) = \varphi_c(d)\varepsilon_d^{-1}\sqrt{cz+d}$$

と定める．ここで，$\varphi_c(d)$ は拡張された Jacobi 記号であり,

$$\varepsilon_d = \begin{cases} 1 & (d \equiv 1 \pmod 4), \\ i & (d \equiv 3 \pmod 4) \end{cases}$$

である.

この $J(\gamma, z)$ を用いて，$\widetilde{\Gamma'}$ を定義する.

定義 1.23
$\Gamma_0(4)$ の部分群 Γ' に対し,

$$\widetilde{\Gamma'} = \{(\gamma, J(\gamma, z)) \mid \gamma \in \Gamma'\}$$

と定義する．また $\gamma \in \Gamma'$ に対し，$\widetilde{\gamma} = (\gamma, J(\gamma, z))$ と定める.

$\widetilde{\Gamma'}$ について定義から次のことがわかる.

命題 1.24
$\widetilde{\Gamma'}$ と Γ' は群として同型である.

さてこれまでと同様に，cusp での状況についての定義は後述することとして，重さ半整数の保型形式の定義をする．

定義 1.25 (重さ半整数の保型形式)

$\mathbb{H}$ 上の有理型関数 f が $\widetilde{\Gamma'}$ に対する**重さ $\dfrac{k}{2}$ の保型関数**であるとは，任意の $\widetilde{\gamma'} \in \widetilde{\Gamma'}$ に対し，

$$f(z)\Big|[\widetilde{\gamma'}]_{\frac{k}{2}} = f(z) \tag{1.6}$$

が成立し，かつすべての cusp で f が有理型であることをいう．また，保型関数 f が**保型形式**（resp. **cusp 形式**）であるとは，f が $\mathbb{H}$ 上正則であり，かつすべての cusp で正則である（resp. 消えている）ことをいう．また，$M_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma'})$，$S_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma'})$ でそれぞれ重さ $\dfrac{k}{2}$ の保型形式全体，重さ $\dfrac{k}{2}$ の cusp 形式全体を表す．

cusp 条件を定義する前に，指標付き重さ半整数の保型形式についても定義しておく．

定義 1.26 (指標付き重さ半整数の保型形式)

$4|N$ とし，χ を mod N の Dirichlet 指標とする．このとき，

$$\begin{aligned} M_{\frac{k}{2}}(N,\chi) &= \left\{ f \in M_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma_1(N)}) \,\middle|\, f\Big|[\widetilde{\gamma}]_{\frac{k}{2}} = \chi(d) f \quad \left(\forall \gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_0(N)\right) \right\}, \\ S_{\frac{k}{2}}(N,\chi) &= M_{\frac{k}{2}}(N,\chi) \cap S_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma_1(N)}) \end{aligned}$$

と定義する．

指標付き重さ半整数の保型形式を用いて，重さ整数のときと同様に

$$M_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma_1(N)}) = \bigoplus_{\chi} M_{\frac{k}{2}}(N,\chi)$$

と直和分解を得ることができる．

さて，今からは cusp 条件を定義の概要を述べる．まず，2 つの写像 P, L を以下のように定める：

$$\begin{array}{cccc} P: & G & \longrightarrow & GL_2^+(\mathbb{Q}) \\ & \cup & & \cup \\ & (\gamma,\phi(z)) & \longmapsto & \gamma \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} L: & \Gamma_0(4) & \longrightarrow & \widetilde{\Gamma_0(4)} \\ & \cup & & \cup \\ & \gamma & \longmapsto & (\gamma, J(\gamma,z)). \end{array}$$

P は準同型であり，P を $\widetilde{\Gamma_0(4)}$ に制限した写像と L は同型写像で互いに逆写像である．ここで，$G^1 \overset{\text{def}}{=} P^{-1}(\Gamma) = \{(\alpha,\phi(z) \in G) \mid \alpha \in \Gamma\}$ と定義し，cusp $s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ に対し，$s = \alpha\infty$ $(\alpha \in \Gamma)$，$\xi = (\alpha,\phi(z)) \in G^1$ とする．このとき，2 つの固定部分群

$$\begin{aligned} \widetilde{\Gamma'_s} &= \{\widetilde{\gamma'} \in \widetilde{\Gamma'} \mid \gamma s = s\}, \\ G^1_\infty &= \{\eta \in G^1 \mid \eta\infty = \infty\} \end{aligned}$$

を考える．$\Gamma_\infty = \left\{ \pm \begin{bmatrix} 1 & j \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, j \in \mathbb{Z} \right\}$ であることは容易に確認できるから，

$$G^1_\infty = \left\{ \left(\pm \begin{bmatrix} 1 & j \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, t \right) \,\middle|\, j \in \mathbb{Z},\ t \in T \right\}$$

が得られる．このとき，写像 P によって，$\xi^{-1}\widetilde{\Gamma'_s}\xi$ と $\alpha^{-1}\Gamma'_s\alpha$ は同型であり，$\left|\Gamma:\Gamma'\right|<\infty$ であるから，$\alpha^{-1}\Gamma'_s\alpha$ はある自然数 h を用いて

$$\left\{\pm\begin{bmatrix}1 & h\\0 & 1\end{bmatrix}^j \middle| j\in\mathbb{Z}\right\},\ \left\{\begin{bmatrix}1 & h\\0 & 1\end{bmatrix}^j \middle| j\in\mathbb{Z}\right\},\ \left\{-\begin{bmatrix}1 & h\\0 & 1\end{bmatrix}^j \middle| j\in\mathbb{Z}\right\}$$

のいずれかの形で表せる．故に，$\pm\xi^{-1}\widetilde{\Gamma'_s}\xi$ はある $t\in T$ を用いて $\left\{\left(\pm\begin{bmatrix}1 & h\\0 & 1\end{bmatrix}^j, t\right) \middle| j\in\mathbb{Z}\right\}$ という形で書くことができる．

いま，$\mathbb{H}$ 上の有理型関数 f で任意の $\widetilde{\Gamma'}$ の元 $\widetilde{\gamma'}$ に対し，$f\Big|[\widetilde{\gamma'}]_{\frac{k}{2}}=f$ を満たすものについて考える．$\xi\in\widetilde{\Gamma}$ を $s=\xi\infty$ を満たす元とし，$g\overset{\mathrm{def}}{=}f\Big|[\xi]_{\frac{k}{2}}$ とすれば, g はすべての $\Big|[\pm\xi^{-1}\widetilde{\gamma'}\xi]_{\frac{k}{2}}$ $(\gamma'\in\Gamma')$ で不変である．このことから $t^k=e^{2\pi ir}$ $\left(r=0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right)$ と書くと，$e^{-\frac{2\pi irz}{h}}g(z)$ は周期 h の周期関数になることが確認でき，Fourier 展開

$$e^{-\frac{2\pi irz}{h}}g(z)=\sum_n a(n)q_h^n$$

を得る．この Fourier 係数 $a(n)$ を用いて，f が cusp s で“有理型”,“正則”,“消えている”ということをこれまでと同様に定義する．

定義 1.27 (重さ半整数の保型形式の cusp 条件)

上の記号の元，f が cusp s で**有理型**であるとは，$a(n)\neq 0$ となる負の整数 n が有限個であることをいう．また f が cusp s で，**正則**であるとは，すべての負の整数 n に対して $a(n)=0$ であることをいい，cusp s で**消えている**とは，すべての 0 以下の整数に対して $a(n)=0$ であることをいう．

しかしまだこの定義が“cusp s の Γ' 同値類に対し well-defined であるか”ということを確認していない．しかし，実は前に述べた h や t の選び方は s の Γ' 同値類で共通であることが確認できるので，この定義が well-defined であることがわかる．このことは [Kob93, p. 181, Proposition 2] を見てほしい．

1.4 Hecke 作用素と Petersson 内積

この節では保型形式を調べるうえで重要な道具である Hecke 作用素と Petersson 内積について定義する．重さ整数の Hecke 作用素については格子上の保型関数に関して定める方法と両側剰余類を用いて定める方法の大きく 2 つの手法がある．重さ整数の場合の Hecke 作用素の種々の関係式を導くには前者の方が理解がしやすいことが多い．実際，命題 1.33 を導くことは格子の部分格子を計算することに対応する．しかし今回は重さ半整数の場合の定義との比較のために後者の方法で定めることとする．

まず，重さ整数の場合の Hecke 作用素を定めるために準備をする．

定義 1.28 (通約可能)

群 G の 2 つの部分群 G_1，G_2 が**通約可能**であるとは，$|G_1:G_1\cap G_2|$，$|G_2:G_1\cap G_2|$ がともに有限であることをいう．

今回は詳しくは述べないが，通約可能という概念は Fuchs 群を考える場合には非常に良い概念

である．例えば，$\varGamma_1$ と $\varGamma_2$ が通約可能であれば，それらの cusp や基本領域のコンパクト性は一致する．

命題 1.29 ([Kob93, p. 165, Proposition 41])
群 G の部分群 G' と $\alpha \in G$ に対し，G' と $\alpha^{-1}G'\alpha$ が通約可能であるとし，$G'' = G' \cap \alpha^{-1}G'\alpha$, $d = |G' : G''| (< \infty)$ とする．このとき，G' の G'' による右剰余類分解を

$$G' = \bigcup_{j=1}^{d} G''\gamma'_j$$

とすれば，$G'\alpha G'$ の G' による右剰余類分解は

$$G'\alpha G' = \bigcup_{j=1}^{d} G'\alpha\gamma'_j$$

である．また，逆も成り立つ．

上の命題を用いて $\Big|[\varGamma'\alpha\varGamma']_k$ という記号を定義する．

定義 1.30
$\varGamma'$ を $\varGamma$ の部分群，α を $GL_2^+(\mathbb{Q})$ の元で，$\varGamma'$ と $\alpha^{-1}\varGamma'\alpha$ が通約可能であるとする．$\varGamma'' = \varGamma' \cap \alpha^{-1}\varGamma'\alpha$, $d = \big|\varGamma' : \varGamma''\big| (< \infty)$ とおく．また $\varGamma'$ の $\varGamma''$ による右剰余類分解を

$$\varGamma' = \bigcup_{j=1}^{d} \varGamma''\gamma'_j$$

とする．このとき，任意の $\varGamma'$ の元 γ' に対し $f\Big|[\gamma']_k = f$ となる $\mathbb{H}$ 上の関数 f に対し，

$$f(z)\Big|[\varGamma'\alpha\varGamma']_k = \sum_{j=1}^{d} f\Big|[\alpha\gamma'_j]_k$$

と定義する．

この定義は両側剰余類の代表元の取り方や $\varGamma'$ の $\varGamma''$ による右剰余類分解によらない．また，f が $\varGamma'$ に対する保型形式であれば，$f\Big|[\varGamma'\alpha\varGamma']_k$ も $\varGamma'$ に対する保型形式であることが確認できる．

定義 1.31
S^+ を $\mathbb{Z}$ の $\{0\}$ でない加法に関する部分群，$S^\times$ を $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ の部分群，n を自然数とする．このとき，集合 $\Delta^n(N, S^+, S^\times)$ を次のように定義する：

$$\Delta^n(N, S^+, S^\times) = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, N|c,\ a \in S^\times,\ b \in S^+,\ \det A = n \right\}.$$

これで重さ整数の場合の準備が整った．これらの記号を用いて Hecke 作用素を次のように定義する．

定義 1.32 (重さ整数の場合の Hecke 作用素)
$\Gamma' = \Delta^1(N, S^\times, S^+)$，自然数 n，Γ' に対する重さ k の保型形式 f に対し，**Hecke 作用素** T_n を

$$T_n f = \sum f\Big|[\Gamma'\alpha\Gamma']_k$$

と定める．ここで，和は $\Delta^n(N, S^\times, S^+)$ に含まれる Γ' による両側剰余類全体をわたるものとする．

重さ整数の場合の Hecke 作用素は次の関係式を満たす.

命題 1.33 ([Kob93, pp. 156–157, Proposition 32])
$f \in M_k(N, \chi)$ とし，l を 2 以上の自然数する．このとき，T_n に対して，以下のことが成り立つ.

(1) 自然数 m, n が互いに素であれば，$T_{mn} = T_m T_n$ である．特に，$T_m T_n = T_n T_m$ である.
(2) N を割り切る素数 p に対し，$T_{p^l} = T_p^l$ である.
(3) N を割り切らない素数 p に対し，$T_{p^l} = T_{p^{l-1}} T_p - pT_{p^{l-2}T_{p,p}}$ である．ここで，$T_{p,p}$ は $T_{p,p}f = n^{k-2}\chi(n)f$ なる作用素である.

次に，重さ半整数の場合を定義する．いま，$\xi_n = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}, \sqrt[4]{n}\right)$ とする.

定義 1.34 (重さ半整数の場合の Hecke 作用素)
$f \in M_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma_1(N)})$ とし，自然数 n は N と互いに素であるとする．このとき，

$$f\Big|[\widetilde{\Gamma_1(N)}\xi_n\widetilde{\Gamma_1(N)}]_{\frac{k}{2}} = \sum_j f\Big|[\xi_n\widetilde{\gamma_j}]_{\frac{k}{2}}$$

とする．ただし，和は $\widetilde{\Gamma_1(N)}\xi_n\widetilde{\Gamma_1(N)}$ の $\widetilde{\Gamma_1(N)}$ に関する右剰余類をわたるものとする．ここで，**Hecke 作用素** $\widetilde{T}_{n^2}$ を

$$\widetilde{T}_{n^2} f = f\Big|[\widetilde{\Gamma_1(N)}\xi_n\widetilde{\Gamma_1(N)}]_{\frac{k}{2}}$$

と定める.

今，重さ半整数の Hecke 作用素を平方数に対してのみ考えていることには，次のような理由がある.

命題 1.35 ([Kob93, pp. 204–206, Proposition 12])
n が完全平方でなければ，$f\Big|[\widetilde{\Gamma_1(N)}\xi_n\widetilde{\Gamma_1(N)}]_{\frac{k}{2}} = 0$ である.

重さ半整数の場合も，重さ整数の場合の類似の関係式が成り立つ.

命題 1.36 ([Kob93, p. 210])
l を自然数する．このとき，$\widetilde{T}_{n^2}$ に対して，以下のことが成り立つ.

(1) 自然数 m, n が互いに素であれば，$\widetilde{T}_{m^2n^2} = \widetilde{T}_{m^2}\widetilde{T}_{n^2}$ である．特に，$\widetilde{T}_{m^2}\widetilde{T}_{n^2} = \widetilde{T}_{n^2}\widetilde{T}_{m^2}$ である.
(2) $\widetilde{T}_{p^{2l}}$ は $\widetilde{T}_{p^2}$ による多項式で表せる.

また，Hecke 作用素の固有形式について定義する.

定義 1.37 (Hecke 固有形式)

重さ整数の保型形式 f が Hecke 作用素 T_n に対する固有ベクトルであるとき，f は T_n に対する **Hecke 固有形式**であるという．同様に，重さ半整数の保型形式 f が Hecke 作用素 $\widetilde{T}_{n^2}$ に対する固有ベクトルであるとき，f は $\widetilde{T}_{n^2}$ に対する **Hecke 固有形式**であるという．また，f がいくつかの Hecke 作用素に対する固有ベクトルであるとき，f は **Hecke 同時固有形式**であるという．

最後に Petersson 内積について述べ，本節を終えよう．まず，定義を述べる．

定義 1.38 (重さ整数の場合の Petersson 内積)

$\varGamma'$ を $\varGamma$ の合同部分群とし，F' を $\varGamma'$ の基本領域とする．また，f_1，$f_2 \in M_k(\varGamma')$ で少なくとも 1 つは cusp 形式であるとする．このとき，

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|\varGamma : \varGamma'|} \int_{F'} f_1(z)\overline{f_2(z)} y^k \frac{dxdy}{y^2}$$

と定義する．$\langle f_1, f_2 \rangle$ を f_1 と f_2 の **Petersson 内積**という．

定義 1.39 (重さ半整数の場合の Petersson 内積)

$4|N$ とし，$F_0(N)$ を $\varGamma_0(N)$ の基本領域とする．また，g_1，$g_2 \in M_{k+\frac{1}{2}}(\widetilde{\varGamma_0(N)})$ で少なくとも 1 つは cusp 形式であるとする．このとき，

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \frac{1}{6\,|\varGamma_0(4) : \varGamma_0(N)|} \int_{F_0(N)} g_1(z)\overline{g_2(z)} y^{k+\frac{1}{2}} \frac{dxdy}{y^2}$$

と定義する．$\langle g_1, g_2 \rangle$ を g_1 と g_2 の **Petersson 内積**という．

Petersson 内積について，次の 2 つの命題が成り立つ．

命題 1.40 ([Kob93, p. 170, Proposition 45])

定義 1.38，定義 1.39 の記号の下，次の 3 つが成り立つ：

(1) $\langle f_1, f_2 \rangle$ および $\langle g_1, g_2 \rangle$ は絶対収束する；

(2) $\langle f_1, f_2 \rangle$ の値は合同部分群や基本領域の取り方によらない；

(3) $\langle g_1, g_2 \rangle$ の値は基本領域の取り方によらない．

命題 1.41 ([Kob93, p. 171, Proposition 47])

$\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$ とすると，定義 1.38 の記号の下，

$$\left\langle f_1 \middle| [\alpha]_k, f_2 \right\rangle = \left\langle f_1, f_2 \middle| [\alpha^{-1}]_k \right\rangle$$

が成り立つ．

第 2 章

Weil の逆定理と志村対応

この章では教科書 Miyake [Miy06] と論文 Shimura [Shim73] を基に Weil の逆定理と志村氏による志村対応について概説する．Weil の逆定理とは「Dirichlet 級数がいつ保型形式になるか」という条件を与えるものである．これについては基本的に証明は割愛する代わりに [Miy06] のページを記載している．また志村対応とは「重さ半整数の保型形式から重さ整数の保型形式を構成する」というもので [Shim73] で示された．こちらに関しては本論文中でも概説を行う．

2.1 Fourier 係数の増大度の評価

この節では Fourier 係数の増大度について評価を与える．この増大度は Dirichlet 級数が絶対収束する右半平面を決定する上で重要である．

この節以降，$\mathcal{O}$ は Landau の記号とする．すなわち，

$$f(x) \text{ が } x \to \alpha \text{ で } \mathcal{O}(g(x)) \text{ である}$$

とは，

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ が有限確定値}$$

であることをいう．

まず，重さ整数の cusp 形式の Fourier 係数の増大度を調べる．

命題 2.1

重さ k の cusp 形式 f の Fourier 係数 $a(n)$ に対し，$n \to \infty$ のとき，$a(n) = \mathcal{O}(n^{\frac{k}{2}})$ が成立する．ここで，$\mathcal{O}$ は Landau の記号である．

証明

f の Fourier 展開を $f(z) = F(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n$ とする．このとき，$h(z) \stackrel{\text{def}}{=} \left|f(z)\right| \cdot \mathrm{Im}(z)^{\frac{k}{2}}$ は有界であることが確認できる．よって，

- $\left|F(q)\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n\right| \leq M \cdot \mathrm{Im}(z)^{-\frac{k}{2}}$
- $\left|q\right| = e^{-\frac{1}{n}} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = \dfrac{1}{2\pi n}$

が得られる．この 2 つを用いて $a(n) = \int_{|q|=e^{-\frac{1}{n}}} F(q)q^{-n-1}dq$ を評価すれば，

$$\left|a(n)\right| \leq Me\left(\frac{1}{2\pi n}\right)^{-\frac{k}{2}}$$

である．

Eisenstein 級数 E_k の Fourier 係数の増大度に関しても，約数関数 $\sigma_{k-1}(n)$ の増大度を評価することにより，上の命題と同じ増大度が得られる．これらをまとめると以下のようになる．

命題 2.2

重さ k の保型形式 f の Fourier 係数 $a(n)$ に対し，$a(n) = \mathcal{O}(n^{\frac{k}{2}})$ が成立する．

しかしながら，この評価は最適ではない．実際，Deligne [Del74] によって重さ 12 の cusp 形式である Ramanujan の Δ 関数の Fourier 係数 $\tau(n)$ に対して，次のことが示されている．

定理 2.3

Ramanujan の Δ 関数の Fourier 係数 $\tau(n)$ に対し，$\tau(n) \leq 2n^{\frac{11}{2}}$ が成り立つ．特に，$\tau(n) = \mathcal{O}(n^{\frac{11}{2}})$ である．

また，重さ半整数の場合も命題 2.1 と同様の議論により，次の評価が得られる．

命題 2.4

重さ $\dfrac{k}{2}$ の cusp 形式 f の Fourier 係数 $a(n)$ に対し，$a(n) = \mathcal{O}(n^{\frac{k}{4}})$ が成立する．

2.2 Weil の逆定理

この節では志村対応を証明するのに必要となる Weil の逆定理について述べる．Weil の逆定理を示すうえで特に重要になるものは命題 2.5，定理 2.9，補題 2.20 の 3 つである．

さて，まずは保型形式，cusp 形式の上半平面全体での増大度について考察する．保型形式，cusp 形式は上半平面上で正則であり，cusp に関しても増大度に関係する条件を満たす必要があった．このことから保型関数，保型形式，cusp 形式の順に増大度に制限があることが推察される．実際，次が成り立つ．

命題 2.5 ([Miy06, pp. 41–42, Thorem 2.1.4])

重さ k の Γ に対する保型関数 $f(z)$ が上半平面 $\mathbb{H}$ で正則であるとする．このとき正の実数 ν が存在し，$\mathrm{Im}(z) \to 0$ のとき

$$f(z) = \mathcal{O}(\mathrm{Im}(z)^{-\nu}) \tag{2.1}$$

が $\mathrm{Re}(z)$ に関して一様に成り立てば，$f(z)$ は保型形式である．さらに $\nu < k$ ととれるならば，$f(z)$ は cusp 形式である．

以下，この節では特に断りがなければ $\mathbb{H}$ 上の複素数値関数 $f(z)$ は次の条件 $(*1)$ から $(*3)$ を満たすものとする：

(∗1)　$f(z)$ は $\mathbb{H}$ 上正則である；

(∗2)　$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n$ $(a(n) \in \mathbb{C})$ という形の関数であり，右辺の級数は $\mathbb{H}$ 上広義一様に絶対収束する；

(∗3)　正の実数 ν が存在し，$\mathrm{Im}(z) \to 0$ のとき，$f(z) = \mathcal{O}(\mathrm{Im}(z)^{-\nu})$ が $\mathrm{Re}(z)$ に関して一様に成り立つ．

このとき，命題 2.1 と同様の方法で $a(n) = \mathcal{O}(n^\nu)$ が成り立つことが確認できる．また，逆に $a(n) = \mathcal{O}(n^\nu)$ とすれば次のことがわかる．

補題 2.6 ([Miy06, p. 117, Lemma 4.3.3])

$a(n) = \mathcal{O}(n^\nu)$ となる複素数列 $\{a(n)\}$ に対し，$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n$ とする．このとき，右辺は広義一様に絶対収束し，$f(z)$ は $\mathbb{H}$ 上正則であり，かつ

- 正の実数 ν が存在し，$\mathrm{Im}(z) \to 0$ のとき，$f(z) = \mathcal{O}(\mathrm{Im}(z)^{-\nu-1})$,
- $\mathrm{Im}(z) \to \infty$ のとき，$f(z) = \mathcal{O}(e^{-2\pi \mathrm{Im}(z)})$

が $\mathrm{Re}(z)$ に関して一様に成り立つ．

次に，関数 $f(z)$ が与えられたとき，次のような 2 つの Dirichlet 級数を考える．

定義 2.7

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n$ に対し，$L(s; f)$, $\Lambda_N(s; f)$ を

$$L(s; f) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s},$$
$$\Lambda(s; f) = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{N}}\right) \mathit{\Gamma}(s)L(s; f)$$

と定める．ここで，$\mathit{\Gamma}(s)$ は $\mathit{\Gamma}$ 関数である．

$a(n) = \mathcal{O}(n^\nu)$ であったから，$L(s; f)$ は任意の $\epsilon > 0$ に対し $\mathrm{Re}(s) \geq 1 + \nu + \epsilon$ で広義一様に絶対収束し，$\mathrm{Re}(s) > 1 + \nu$ で正則であることに注意しよう．

補題 2.8 (Phragman-Lindelof, [Miy06, pp. 118–119, Lemma 4.3.4])

$\nu_1 < \nu_2$ なる 2 つの実数 ν_1, ν_2 と正の実数 δ を用いて，領域 F, U を

$$F = \{s \in \mathbb{C} \mid \nu_1 \leq \mathrm{Re}(s) \leq \nu_2\},$$
$$U = \{s \in \mathbb{C} \mid \nu_1 - \delta < \mathrm{Re}(s) < \nu_2 + \delta\}$$

と定める．U 上の正則関数 $\phi(s)$ が以下の 2 条件

(1) 正の実数 a が存在して，U の元 s を $\mathrm{Im}(s) \to \infty$ とすれば，$\mathrm{Re}(s)$ に関して一様に

$$\left|\phi(s)\right| = \mathcal{O}(e^{|\mathrm{Im}(z)|^a})$$

が成り立つ,

(2) 実数 b が存在して，$\mathrm{Re}(s) = \nu_1$，ν_2 となる s に対し $\mathrm{Im}(s) \to \infty$ とすれば，

$$\left|\phi(s)\right| = \mathcal{O}(\left|\mathrm{Im}(z)\right|^b)$$

が成り立つ

を満たすならば，F の元 s を $\mathrm{Im}(s) \to \infty$ とすれば，

$$\left|\phi(s)\right| = \mathcal{O}(\left|\mathrm{Im}(z)\right|^b)$$

が F 上一様に成り立つ．

この補題を用いれば，次が成り立つ．

定理 2.9 (Hecke, [Miy06, pp. 119–122, Theorem 4.3.5])

k を実数，N を正の実数とし，$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n$，$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)q^n$ とする．このとき，次は同値である：

(A) $g(z) = (-i\sqrt{N}z)^{-k} f\left(-\frac{1}{Nz}\right)$.

(B) $\Lambda_N(s; f)$，$\Lambda_N(s; g)$ が全平面に解析接続され，$\Lambda_N(s; f) = \Lambda_N(k - s; g)$ を満たし，さらに $\Lambda_N(s; f) + \frac{a(0)}{s} + \frac{b(0)}{k - s}$ が任意の垂直帯領域で有界な正則関数である．

定理 2.9 を k，N を自然数として少し書き直せば，次が得られる．

系 2.10 ([Miy06, p. 122, Theorem 4.3.6])

k，N を自然数とし，$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n$，$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)q^n$ とする．このとき，次は同値である：

(A) $g(z) = (\sqrt{N}z)^{-k} f\left(-\frac{1}{Nz}\right)$.

(B) $\Lambda_N(s; f)$，$\Lambda_N(s; g)$ が全平面に解析接続され，$\Lambda_N(s; f) = i^k\Lambda_N(k - s; g)$ を満たし，さらに $\Lambda_N(s; f) + \frac{a(0)}{s} + \frac{i^k b(0)}{k - s}$ が任意の垂直帯領域で有界な正則関数である．

自然数 N に対し，ω_N を

$$\omega_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ N & 1 \end{bmatrix}$$

と定める．このとき，容易に次のことがわかる．

系 2.11 ([Miy06, p. 122, Corollary 4.3.7])

cusp 形式 $f(z) \in S_k(N, \chi)$ に対し，$\Lambda_N(s; f)$ は全平面に正則関数として解析接続され，任意の垂直帯領域で有界であり，$\Lambda_N(s; f) = i^k\Lambda_N(k - s; f\big|[\omega_N]_k)$ が成り立つ．

また，2.1 節での議論から次がわかる．

定理 2.12（[Miy06, pp. 122–123, Theorem 4.3.8]）

k を偶数とする．このとき $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n$ が重さ k の保型形式であることと次の 3 条件を満たすことは同値である：

(1) $\Lambda_N(s; f)$，$\Lambda_N(s; g)$ が全平面に解析接続される．

(2) $\Lambda_N(s; f) + \dfrac{a(0)}{s} + \dfrac{i^k a(0)}{k-s}$ が任意の垂直帯領域で有界な正則関数である．

(3) $\Lambda_N(s; f) = i^k \Lambda_N(k-s; g)$ を満たす．

また，$f(z)$ が重さ k の cusp 形式であることと上の 3 条件に加え，

(4) $a(0) = 0$

が成り立つことは同値である．

上の定理の合同部分群に対する保型形式版が Weil の逆定理である．まず，合同部分群に対する保型形式 $f(z)$ がどのような条件式を満たすのかを考察していこう．

少し記号の定義をする．まず，実数 a に対し，行列 $\alpha(a)$ を

$$\alpha(a) = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

と定める．また，関数 $f(z)$ と $L(s; f)$ に対し，指標 ψ での twist $f_\psi(z)$ と $L(s; f, \psi)$ を次のように定義する．

定義 2.13

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n$ とし，ψ を導手 $m = m_\psi$ の原始的な Dirichlet 指標とする．このとき，

- $f_\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)\psi(n)q^n$,
- $L(s; f, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\psi(n)n^{-s}$,
- $\Lambda_N(s; f, \psi) = \left(\dfrac{m\sqrt{N}}{2\pi} \right) \mathit{\Gamma}(s) L(s; f, \psi)$

と定義する．

注意 2.14

定義 2.7 の記号と定義 2.13 の記号に関して，

(1) $f(z)$ が条件 $(*)$ を満たせば，$f_\psi(z)$ が条件 $(*)$ を満たす，

(2) $L(s; f_\psi) = L(s; f, \psi)$,

(3) $\Lambda_{Nn^2}(s; f_\psi) = \Lambda_N(s; f, \psi)$

が成り立つ．

このとき，系 2.10 から次が得られる．

系 2.15 ([Miy06, p. 123, Lemma 4.3.9])

k, N を自然数とし，$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)q^n$ とする．また ψ を導手 $m = m_\psi$ の原始的な Dirichlet 指標とする．このとき，ある複素数 C_ψ に対して，次は同値である：

(A_ψ) $f_\psi\Big|[\omega_{Nm^2}]_k = C_\psi g_{\overline{\psi}}$.

(B_ψ) $\Lambda_N(s; f, \psi)$ は全平面に正則関数として解析接続され，任意の垂直帯領域で有界な正則関数であり，$\Lambda_N(s; f, \psi) = i^k C_\psi \Lambda_N(k-s; g, \psi)$ を満たす.

ここで，C_ψ をどのようにとればよいかを決定する．そのために補題を 1 つ用意する.

補題 2.16 ([Miy06, pp. 123–124, Lemma 4.3.10])

ψ を導手 $m = m_\psi$ の原始的な Dirichlet 指標とする．このとき，

$$f_\psi = G(\psi)^{-1} \sum_{n=1}^{m} \overline{\psi}(n) f \left| \left[\alpha\left(\frac{n}{m}\right)\right]_k \right. \tag{2.2}$$

が成り立つ.

この補題を用いれば，C_ψ が決定できる.

命題 2.17 ([Miy06, pp. 124–125, Theorem 4.3.11])

$f(z)$ を $M_k(N, \chi)$ の元とし，ψ を導手 $m = m_\psi$ の原始的な指標で，m と N が互いに素であるとする．このとき，

$$g = f\Big|[\omega_N]_k,$$
$$C_\psi = \frac{\chi(m)\psi(N)G(\psi)^2}{m}$$

とすれば，

$$f_\psi\Big|[\omega_{Nm^2}]_k = C_\psi g_{\overline{\psi}}$$

が成り立つ.

今までのことを整理すれば，指標付きの cusp 形式に対して次のことがわかる.

定理 2.18 ([Miy06, p. 125, Theorem 4.3.12])

$f(z)$ を $M_k(N, \chi)$ の元とし，ψ を導手 $m = m_\psi$ の原始的な指標とする．また，C_ψ を命題 2.17 のものとする．このとき，$\Lambda_N(s; f, \psi)$ は全平面に正則関数として解析接続され，任意の垂直帯領域で有界な正則関数であり，$\Lambda_N(s; f, \psi) = i^k C_\psi \Lambda_N(k-s; f\Big|[\omega_N]_k, \overline{\psi})$ が成り立つ.

ここで少し準備をする．まず，$(m, vN) = 1$ となる整数 m, v に対して，$mn - uvN = 1$ となる整数 n, u をとり，

$$\gamma(m, v) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} m & -v \\ -uN & n \end{bmatrix}$$

とする．この記号は n, u の選び方によるが，常に

$$\alpha\left(\frac{u}{n}\right)\omega_{Nm^2} = m \cdot \omega_N \gamma(m, v) \alpha\left(\frac{v}{n}\right) \tag{2.3}$$

が成り立つ.

また関数 $f(z)$ に対する $GL_2^+(\mathbb{Q})$ の作用を群環 $\mathbb{C}[GL_2^+(\mathbb{Q})]$ の作用に拡張する．$\beta = \sum_{\alpha} a_\alpha \alpha \in \mathbb{C}[GL_2^+(\mathbb{Q})]$ の $f(z)$ への作用を

$$f\Big|[\beta]_k \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{\alpha} a_\alpha f\Big|[\alpha]_k$$

で定義する．また，次の 2 つの補題では $g(z) = f\Big|[\omega_N]_k$ とする．

補題 2.19（[Miy06, pp. 125–126, Lemma 4.3.13]）
m を 4 または奇素数とする．このとき，mod m のすべての原始的な Dirichlet 指標 ψ に対し，(A_ψ) が成り立つならば，任意の m と互いに素な 2 つの自然数 u，v に対し，

$$g\left|\left[(\chi(m) - \gamma(m,u))\alpha\left(\frac{u}{n}\right)\right]_k = g\right|\left[(\chi(m) - \gamma(m,v))\alpha\left(\frac{v}{n}\right)\right]_k \tag{2.4}$$

が成り立つ．

補題 2.20（[Miy06, pp. 126–127, Lemma 4.3.14]）
m，n を 4 または奇素数とする．このとき，f，g が条件 (A_ψ) を mod m のすべての原始的な Dirichlet 指標および mod n のすべての原始的な Dirichlet 指標に対して満たすとき，$\gamma = \begin{bmatrix} m & -v \\ -uN & n \end{bmatrix}$ と書ける $\mathit{\Gamma}_0(N)$ の任意の元に対し，

$$g\Big|[\gamma]_k = \overline{\chi}(\gamma)g \tag{2.5}$$

が成り立つ．

さて，最後に Weil の逆定理を述べてこの節を終わろう．互いに素な 2 つの自然数 a，b に対し，$A(a,b) \overset{\mathrm{def}}{=} \{a + nb \mid n \in \mathbb{Z}\}$ と定め，$\mathcal{P}$ は 4 とすべての奇素数からなる集合の部分集合で，$\mathcal{P}$ のすべての元は N と互いに素であり，すべての $A(a,b)$ と空でない共通部分を持つものとする．このような $\mathcal{P}$ の存在性は Dirichlet の算術級数定理からわかる．

定理 2.21（Weil の逆定理, [Miy06, pp. 128–129, Theorem 4.3.15]）
k，N を自然数とし，χ を mod N の Dirichlet 指標で $\chi(-1) = (-1)^k$ となるものとする．このとき，$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n$，$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)q^n$ が次の 3 条件を満たすならば，$f(z) \in M_k(N,\chi)$，$g(z) \in M_k(N,\overline{\chi})$，$g = f\Big|[\omega_N]_k$ が成り立つ：

(1) $\Lambda_N(s;f)$，$\Lambda_N(s;g)$ は全平面に解析接続され，

$$\Lambda_N(s;f) = i^k \Lambda_N(k-s;g) \tag{2.6}$$

を満たす；

(2) $\Lambda_N(s;f) + \dfrac{a(0)}{s} + \dfrac{i^k b(0)}{k-s}$ は任意の垂直帯領域で有界である；

(3) 任意の $m \in \mathcal{P}$ に対し，すべての導手 m の原始的な Dirichlet 指標 ψ に関して $\Lambda_N(s;f,\psi)$ は全平面に正則関数として解析接続され，任意の垂直帯領域で有界であり，関数等式

$$\Lambda_N(s;f,\psi) = i^k C_\psi \Lambda_N(k-s;g,\overline{\psi}) \tag{2.7}$$

を満たす．

さらに，正の実数 δ が存在して，$L(s;f)$ が $s = k - \delta$ で絶対収束すれば，f，g は cusp 形式である．

2.3 テータ関数

この節ではテータ関数を定義していく．まずは通常のテータ関数を定義しよう．

定義 2.22（テータ関数）
上半平面 $\mathbb{H}$ 上の関数

$$\Theta(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^n$$

を**テータ関数**という．

テータ関数 $\Theta(z)$ について，次のことがよく知られている．

命題 2.23（[Kob93, p. 148, Theorem]）
$\Theta(z)$ は重さ $\dfrac{1}{2}$ の $\widetilde{\Gamma_0(4)}$ に対する保型形式である．

ここで今後のために，少し用語と記号を準備しておく．

定義 2.24（基本判別式）
整数 d が平方因子を持たないとき，

$$D = \begin{cases} d & (d \equiv 1 \bmod 4) \\ 4d & (d \equiv 2, 3 \bmod 4) \end{cases}$$

を $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ の**基本判別式**という．ただし，$d = 1$ のときは $D = 1$ とする．

定義 2.25（Kronecker 記号）
基本判別式 D に対し，$\left(\dfrac{D}{-}\right)$ を以下のように定める：

(1) $\left(\dfrac{D}{1}\right) = 1$，$\left(\dfrac{D}{-1}\right) = \begin{cases} 1 & (D > 0), \\ -1 & (D < 0); \end{cases}$

(2) $(n, D) \neq 1$ のとき，$\left(\dfrac{D}{n}\right) = 0$；

(3) p が D と互いに素な素数のとき，$\left(\dfrac{D}{p}\right) = \begin{cases} 1 & (D \text{ は } \bmod p \text{ の平方剰余}), \\ -1 & (D \text{ は } \bmod p \text{ の平方非剰余}); \end{cases}$

(4) D が奇数のとき，$\left(\dfrac{D}{p}\right) = \begin{cases} 1 & (D \equiv 1 \pmod 8), \\ -1 & (D \equiv 5 \pmod 8); \end{cases}$

(5) 自然数 $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ が $(n, D) = 1$ のとき，$\left(\dfrac{D}{\pm n}\right) = \left(\dfrac{D}{\pm 1}\right)\left(\dfrac{D}{\pm p_1}\right)^{e_1} \cdots \left(\dfrac{D}{\pm p_r}\right)^{e_r}$．

この $\left(\dfrac{D}{-}\right)$ を **Kronecker 記号**という．

さて，いまから球関数付きテータ関数を Shimura [Shim73] に基づいて定義する．n を自然数，ν を非負整数とする．また A を n 次の実正定値対称行列とする．また，$\mathbb{R}^n$ 上の複素数値関数 $P(\boldsymbol{x})$ を

$$P(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} c \ (c \in \mathbb{C}) & (\nu = 0), \\ \displaystyle\sum_q \beta_q \cdot ({}^t\boldsymbol{y}A\boldsymbol{x})^\nu & (\nu > 0) \end{cases}$$

となるものとする．ここで $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ であり，和は ${}^tyAy = 0$ となる有限個の $\boldsymbol{y}$ を渡る．

ここで，列ベクトル $\boldsymbol{h} \in \mathbb{Z}^n$ に対し，球関数付きテータ関数 $\theta(z; \boldsymbol{h}, A, N, P)$ を次のように定義する．

定義 2.26（球関数付きテータ関数）

上半平面 $\mathbb{H}$ 上の関数 $\theta(z; \boldsymbol{h}, A, N, P)$ を

$$\theta(z; \boldsymbol{h}, A, N, P) = \sum_{\boldsymbol{m} \equiv \boldsymbol{h} \pmod{N}} P(\boldsymbol{m}) q^{\frac{{}^t\boldsymbol{m}A\boldsymbol{m}}{2N^2}}$$

と定義する．

注意 2.27

以下，特に断りがなければ本節を通じて次の 3 つを仮定する：

- $A, N, \boldsymbol{h}$ は次の 2 条件を満たすものとする：
  (1) $ANA^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$；
  (2) $A\boldsymbol{h} \in N\mathbb{Z}^n$.
  このとき，$\det(A)$ は N^n を割り切る．
- $D = \det(A)$，$\kappa = n + 2\nu$ とおく．
- 関係式などで共通の P を考えているときは，単に $\theta(z; \boldsymbol{h}, A, N)$ と書くこともある．

球関数付きテータ関数 $\theta(z; \boldsymbol{h}, A, N, P)$ は次の 3 つの変換公式を持つ．

命題 2.28（[Shim73, p. 454]）

c を自然数とする．このとき，以下の 3 つが成り立つ：

(1) $$\theta\left(-\frac{1}{z}; \boldsymbol{h}, A, N, P\right) = (-i)^\nu D^{-\frac{1}{2}} (-iz)^{\frac{\kappa}{2}} \sum_{\substack{\boldsymbol{k} \bmod N \\ A\boldsymbol{k} \equiv 0 \pmod{N}}} \theta(z; \boldsymbol{k}, A, N, P);$$

(2) $$\theta(z+2; \boldsymbol{h}, A, N) = \boldsymbol{e}\left(\frac{{}^t\boldsymbol{h}A\boldsymbol{h}}{N^2}\right) \theta(z; \boldsymbol{h}, A, N);$$

(3) $$\theta(z; \boldsymbol{h}, A, N) = \sum_{\substack{\boldsymbol{g} \bmod cN \\ \boldsymbol{g} \equiv \boldsymbol{h} \pmod{N}}} \theta(cz; \boldsymbol{g}, cA, cN).$$

また，一次分数変換に関して次が成り立つ．

命題 2.29 ([Shim73, pp. 454–456])
$SL_2(\mathbb{Z})$ の元 $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ は $b \equiv 0 \pmod 2$ かつ $c \equiv 0 \pmod{2N}$ なる元とする．このとき，

$$\theta(\gamma(z); \boldsymbol{h}, A, N) = \boldsymbol{e}\left(ab\frac{{}^t\boldsymbol{h}A\boldsymbol{h}}{2N^2}\right)\left(\frac{D}{d}\right)\left(\frac{2c}{d}\right)^n \varepsilon_d^{-n}(cz+d)^{\frac{\kappa}{2}}\theta(z; a\boldsymbol{h}, A, N)$$

が成り立つ．

さて，ここで h_ψ という関数を定義して，これが重さ半整数 の保型形式であることを確認しよう．

命題 2.30 ([Shim73, pp. 457–458, Proposition 2.2, Proposition 2.3])
r を自然数とし，ψ を mod r の原始的な Dirichlet 指標とする．$\nu = 0,\ 1$ を $\psi(-1) = (-1)^\nu$ となるようにとる．また，上半平面 $\mathbb{H}$ 上の関数 $h_\psi(z) = h(z; \psi)$ を

$$h_\psi(z) = \frac{1}{2}\sum_{m \in \mathbb{Z}} \psi(m) m^\nu \boldsymbol{e}(m^2 z)$$

と定義する．このとき，次の 2 つの関係式が成り立つ：

(1) $h(\gamma(z); \psi) = \psi(d)\left(\dfrac{-1}{d}\right)^\nu J(\gamma, z)^{2\nu+1} h(z; \psi)\ (\gamma \in \varGamma_0(4r^2))$；

(2) $h\left(-\dfrac{1}{4r^2 z}; \psi\right) = (-i)^\nu r^{-\frac{1}{2}} G(\psi)(-2riz)^{\nu+\frac{1}{2}} h(z; \overline{\psi})$.

注意 2.31
$\psi_1(d) \overset{\text{def}}{=} \psi(d)\left(\dfrac{-1}{d}\right)^\nu$ とすると，命題 2.30 から

- $\nu = 0$ のとき，$h_\psi \in M_{\frac{1}{2}}(4r^2, \psi)$,
- $\nu = 1$ のとき，$h_\psi \in S_{\frac{3}{2}}(4r^2, \psi_1)$

が得られる．

$\nu = 0$ のときの $h_\psi(kz)$ は重さ $\dfrac{1}{2}$・レベル N の保型形式の空間の生成元となっている．これは Serre-Stark [SS77] の結果である．これに関しては [堀江] が詳しい．

2.4 志村対応

この節では志村対応について概説する．志村対応とは重さ半整数の保型形式から重さ整数の保型形式を構成する対応であり，Shimura [Shim73] によって示された．逆に，重さ整数の保型形式から重さ半整数の保型形式を構成する対応は“新谷対応”と呼ばれ Shintani [Shin75] によって与えられている．

志村対応が考えられた動機づけの 1 つとして重さ半整数の保型形式の Fourier 係数から得られる Dirichlet 級数が重さ整数の保型形式の場合と同じような Euler 積表示を持つことがあげられる．（このことも [Shim73] で初めて示された．）まずはこのことを確認していく．

定理 2.32（[Shim73, pp. 450–451, Theorem 1.7]）

k を自然数，p を素数，N は 4 の倍数とし，χ を mod N の Dirichlet 指標とする．$f(z) \in M_{k+\frac{1}{2}}(N,\chi)$ と $\widetilde{T}_{p^2}f(z)$ の Fourier 展開をそれぞれ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n$，$\widetilde{T}_{p^2}f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)q^n$ とすると，

$$b(n) = a(p^2n) + \chi(p)\left(\frac{(-1)^k n}{p}\right)p^{k-1}a(n) + \chi(p^2)p^{2k-1}a\left(\frac{n}{p^2}\right) \tag{2.8}$$

が成り立つ．ただし，p^2 が n を割り切らないときは $a\left(\frac{n}{p^2}\right) = 0$ とする．

また，命題 1.36 を用いれば次が得られる．

定理 2.33（[Shim73, pp. 451–452, Corollary 1.8]）

すべての Hecke 作用素 $\widetilde{T}_{p^2}$ に対する Hecke 同時固有形式 $f(z) \in M_{k+\frac{1}{2}}(N,\chi)$ が存在する．また $f(z)$ の Fourier 展開を $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n$ とし，$\widetilde{T}_{p^2}$ に対する $f(z)$ の固有値を ω_p とする．このとき，$p|N$ または $p^2 \nmid t$ となる素数 p に対し，

(1) $\omega_p a(tn^2) = a(tn^2p^2) + \chi(p)\left(\frac{(-1)^k t}{p}\right)p^{k-1}a(t)$,

(2) $\omega_p a(p^{2m}t) = a(p^{2m+2}t) + \chi(p^2)\left(\frac{(-1)^k}{p^2}\right)p^{2k-1}a(p^{2m-2}t)$

が成り立つ．

この関係式から重さ半整数の保型形式から作られる Dirichlet 級数は次の Euler 積表示を持つ．

定理 2.34（[Shim73, p. 453, Theorem 1.9]）

t を N と互いに素で，平方因子を持たない自然数とする．すべての Hecke 作用素 $\widetilde{T}_{p^2}$ に対する Hecke 同時固有形式 $f(z)$ の Fourier 展開を $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n$ とする．また，$\widetilde{T}_{p^2}$ に対する $f(z)$ の固有値を ω_p とする．このとき，Dirichlet 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a(tn)n^{-s}$ は次の Euler 積を持つ：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(tn)n^{-s} \quad = a(t)\prod_{p:\text{素数}}\left(1-\chi(p)\left(\frac{(-1)^k t}{p}\right)p^{k-1-s}\right)(1-\omega_p p^{-s}+\chi(p)^2p^{2k-1-2s})^{-1}.$$

このように重さ半整数の保型形式から得られる Dirichlet 級数が重さ整数の場合の様に 2 次の Euler 積を持つことから，志村対応は考えられた．よってここからは 2 次の Euler 積の部分

$$\begin{aligned} a(t)\prod_{p:\text{素数}}(1-\omega_p p^{-s}+\chi(p)^2p^{k-2-2s})^{-1} &= \prod_{p:\text{素数}}\left(1-\chi(p)\left(\frac{(-1)^\lambda t}{p}\right)p^{\lambda-1-s}\right)\sum_{n=1}^{\infty}a(tn)n^{-s} \\ &= \left(\sum_{m=1}^{\infty}\chi(m)\left(\frac{(-1)^\lambda t}{m}\right)m^{k-1-s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}a(tn)n^{-s}\right) \end{aligned}$$

が重さ整数の保型形式であることを Weil の逆定理 2.21 を用いて確認していく．

まずは Shimura [Shim73] の主定理の主張を述べておく．

定理 2.35 (Shimura [Shim73, p. 458, Main Theorem])
k を自然数，t を平方因子を持たない自然数，N を 4 の倍数とし，χ を mod N の偶の Dirichlet 指標とする．$f(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a(tn)q^n \in S_{k+\frac{1}{2}}(N,\chi)$ に対し，

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_t(n)q^n=\left(\sum_{m=1}^{\infty}\chi(m)\left(\frac{(-1)^{\lambda}t}{m}\right)m^{k-1-s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}a(tn)n^{-s}\right)$$

と $A_t(n)$ を定め，この $A_t(n)$ から得られる Dirichlet 級数

$$F_t(z)=\sum_{n=1}^{\infty}A_t(n)q^n$$

を考える．このとき，$f(z)$ がすべての素数 p に対する Hecke 同時固有形式であるとすると，ある自然数 N_t が存在して，$F_t\in M_{2k}(N_t,\chi^2)$ である．特に $k\geq 2$ であれば，$F_t\in S_{2k}(N_t,\chi^2)$ である．

この主定理が示されれば，次が容易にわかる．

系 2.36 ([Shim73, pp. 458–459, Corollary])
上記の記号の下，$\widetilde{T}_{p^2}$ に対する固有値を ω_p とする．このとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty}A(n)q^n=\prod_{p:\text{素数}}(1-\omega_p p^{-s}+\chi(p^2)p^{2k-1-2s})^{-1}$$

と $A(n)$ を定め，この $A(n)$ から得られる Dirichlet 級数

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty}A(n)q^n$$

を考える．このとき，N_0 を $a(t)\neq 0$ となるすべての t の最大公約数とすると，$F\in M_{2k}(N_0,\chi^2)$ である．特に $k\geq 2$ であれば，$F\in S_{2k}(N_0,\chi^2)$ である．

この N_0 について [Shim73] では $\dfrac{N}{2}$ と取れるであろうと予想している．これに対し Niwa [Niw74] は志村対応をテータ核関数を用いた積分の形で表示し，実際に重さが大きいほとんどの場合に $\dfrac{N}{2}$ ととれることを示した．最終的にすべての場合に対してこれが成り立つことは Cipra [Cip83] によって示された．しかし，この $\dfrac{N}{2}$ というレベルは最良ではない．これについては Ueda [Ued88] を見てほしい．

話を戻し，[Shim73] の主定理の行っていく．前述したように証明には Weil の逆定理 2.21 を用いる．今回の場合に適用できるようにすこし定理 2.21 の主張を改めておく．

定理 2.37 ([Shim73, pp. 459–460, Lemma 3.1])
複素数列 $\{c(n)\}$ に対し，$F(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}c(n)q^n$，$D(s)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}c(n)n^{-s}$ とする．また，$\mathcal{P}$ を素数の集合で，任意の $A(a,b)$ と共通部分が空でないものとする．このとき，以下の 3 条件を満たすとき，$F(z)\in M_k(M,\phi)$ である：

(1) $D(s)$ はある右半平面 $\mathrm{Re}(s)>\sigma$ で絶対収束する；

(2) M と互いに素なすべての $r \in \mathcal{P}$ とすべての mod r の原始的な Dirichlet 指標 ψ に対し，$R(s,\psi) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)\sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)c(n)n^{-s}$ が全平面に正則関数として解析接続され，任意の垂直帯領域で有界である；

(3) ある右半平面 $\mathrm{Re}(s) > \sigma'$ で絶対収束する Dirichlet 級数 $D'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c'(n)n^{-s}$ が存在し，すべての ψ に対して，以下の関数等式

$$R(k-s,\psi) = C_{\psi}(r^2M)^{s-k-\frac{1}{2}}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\psi}(n)c'(n)n^{-s}$$

を持つ．

さらに，$D(s)$ がある $\mathrm{Re}(s) < k + \dfrac{1}{2}$ となる s で絶対収束するならば，F は cusp 形式である．

定理 2.35 の証明. 詳細な証明は非常に長いため，今回は

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} A_t(n)n^{-s}$ がある右半平面 $\mathrm{Re}(s) > \sigma$ で絶対収束すること，

(2) $t = 1$ のとき，$D_1(s,\psi) = \sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)A_1(n)n^{-s}$ が全平面に正則関数として解析接続され，任意の垂直帯領域で有界であること，

(3) $t = 1$ のとき，$R_1(s,\psi) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)D_1(s,\psi)$ とおくとき，

$$R_1(k-s,\phi) = C_{\phi}(r^2N_t)^{s-k-\frac{1}{2}}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\psi}(n)b(n)n^{-s}$$

を満たす自然数 N_t と Dirichlet 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b(n)n^{-s}$ が存在すること（の特別な場合），

の 3 つを確認する．一般の t での議論を $t = 1$ の場合に帰着する議論や条件 (3) の一般の場合の Dirichlet 級数の存在性については [Shim73] を見てほしい．

(1) について

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_t(n)q^n = \left(\sum_{m=1}^{\infty}\chi(m)\left(\frac{(-1)^k t}{m}\right)m^{k-1-s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}a(tn)n^{-s}\right)$$

であったから，右辺の 2 つの級数の収束性を調べる．

- $\sum_{m=1}^{\infty}\chi(m)\left(\frac{(-1)^k t}{m}\right)m^{k-1-s}$ は Riemann のゼータ関数の収束性に帰着され，$\mathrm{Re}(s) > k$ で絶対収束する．
- $\sum_{n=1}^{\infty} a(tn)n^{-s}$ は，命題 2.4 から，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left|a(tn)n^{-s}\right| &\le \sum_{n=1}^{\infty}\left|a(tn)\right|n^{-\mathrm{Re}(s)} \\ &\le Mt^{\frac{2k+1}{4}}\sum_{n=1}^{\infty}n^{k+\frac{1}{2}-\mathrm{Re}(s)}\end{aligned}$$

であるから，Riemann のゼータ関数の収束性から $\mathrm{Re}(s) > k + \dfrac{3}{2}$ で絶対収束する．

このことから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_t(n)q^n$ は $\mathrm{Re}(s) > k + \dfrac{3}{2}$ で絶対収束する．

<u>(2) について</u>

$$\begin{aligned} D_1(s,\psi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi(n)A_1(n)n^{-s} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \psi(n)\chi_1(n)m^{k-1-s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \psi(n)a_{n^2}m^{-s}\right) \end{aligned}$$

と変形できるから，右辺を Rankin の手法で積分表示する．$h_{\overline{\psi}}(z)(= h(z;\overline{\psi}))$ を命題 2.30 のものとする．今 $\psi(-1) = (-1)^{\nu}$ とすると，$h_{\overline{\psi}}(z) \in M_{\nu+\frac{1}{2}}(4r^2, \overline{\psi_1})$ であることに注意する．よって，$z = x + iy$ とすると，

$$f(z)\overline{h}_{\overline{\psi}}(z) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ n\in\mathbb{N}}} a(n)\psi(m)m^{\nu}\boldsymbol{e}((n-m^2)x)\exp(-2\pi(n+m^2)y)$$

と表せるから，

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(z)\overline{h}_{\overline{\psi}}(z)dx &= \frac{1}{2}\sum_{m\in\mathbb{Z}} a(m^2)\psi(m)m^{\nu}\exp(-4\pi m^2 y) \\ &= \sum_{m\in\mathbb{N}} a(m^2)\psi(m)m^{\nu}\exp(-4\pi m^2 y) \end{aligned}$$

となる．よって，

$$\int_0^{\infty}\left(\int_0^1 f(z)\overline{h}_{\overline{\psi}}(z)dx\right)y^{s-1}dy = (4\pi)^{-s}\Gamma(s)\sum_{m\in\mathbb{N}} a(m^2)\psi(m)m^{\nu-2s}$$

を得る．次にこの左辺を変形していく．$F_{\infty} = \Gamma_{\infty}\backslash\mathbb{H}$ とおくと，左辺は

$$\begin{aligned} (4\pi)^{-s}\Gamma(s)\sum_{m\in\mathbb{N}} a(m^2)\psi(m)m^{\nu-2s} &= \int_0^{\infty}\left(\int_0^1 f(z)\overline{h}_{\overline{\psi}}(z)dx\right)y^{s-1}dy \\ &= \int_{F_{\infty}} f(z)\overline{h}_{\overline{\psi}}(z)y^{s-1}dxdy \end{aligned}$$

と書ける．ここで，$B(z) = B(z,s) = f(z)\overline{h}_{\overline{\psi}}(z)y^{s+1}$，$d_0 z = \dfrac{dxdy}{y^2}$ とおき，R を $\Gamma_{\infty}\backslash\Gamma_0(Nr^2)$ の完全代表系とすると，上式は

$$(4\pi)^{-s}\Gamma(s)\sum_{m\in\mathbb{N}} a(m^2)\psi(m)m^{\nu-2s} = \int_{F_0}\sum_{\gamma\in R} B(\gamma(z))d_0 z$$

と書ける．$\phi(d) = \chi(d)\psi(d)\left(\dfrac{-1}{d}\right)^{-k} = \chi_1(d)\psi(d)$ とおくと，$f(z) \in S_{k+\frac{1}{2}}(N,\chi)$，$h_{\overline{\psi}}(z) \in M_{\nu+\frac{1}{2}}(4r^2, \overline{\psi_1})$ より，

$$B(\gamma(z)) = \phi(d)B(z)(cz+d)^{k-\nu}|cz+d|^{2\nu-1-2s}$$

が成り立つ．よって，$F_0 = \Gamma_0(Nr^2)\backslash\mathbb{H}$ とおくと，

$$(4\pi)^{-s}\Gamma(s)\sum_{m\in\mathbb{N}} a(m^2)\psi(m)m^{\nu-2s} = \int_{F_0} B(z){\sum_{c,d}}' \phi(d)B(z)(cz+d)^{k-\nu}\left|cz+d\right|^{2\nu-1-2s}d_0 z$$

が成り立つ．（ここで，${\sum_{c,d}}'$ は c と d は互いに素であり，$c \equiv 0 \pmod{Nr^2}$ で，$c > 0$ または $(c,d) = (0,1)$ を満たすものをわたる和である．）よって，

$$\begin{aligned}
&2\cdot(4\pi)^{-s}\Gamma(s)\sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)A_1(n)n^{\nu-2s} \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty}\phi(n)n^{k+\nu-1-2s}\cdot(4\pi)^{-s}\Gamma(s)\sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)a(n^2)n^{\nu-2s} \\
&= 2\int_{F_0} f(z)h_{\overline{\psi}}(z)y^{s+1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\phi(n)n^{k+\nu-1-2s}\right)\left({\sum_{c,d\in\mathbb{Z}}}'\phi(d)(cz+d)^{k-\nu}\left|cz+d\right|^{2\nu-1-2s}\right)d_0 z \\
&= \int_{F_0} f(z)h_{\overline{\psi}}(z)y^{s+1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\phi(n)n^{k+\nu-1-2s}\right) \\
&\qquad\qquad \times\left(\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\(Nr^2m,n)=1}}\phi(n)(Nr^2mz+n)^{k-\nu}\left|Nr^2mz+n\right|^{2\nu-1-2s}\right)d_0 z \\
&= \int_{F_0} f(z)h_{\overline{\psi}}(z)y^{s+1}\left(\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\(m,n)\neq(0,0)}}\phi(n)(Nr^2mz+n)^{k-\nu}\left|Nr^2mz+n\right|^{2\nu-1-2s}\right)d_0 z
\end{aligned}$$

が得られる．ここで，次の補題を用いる．

補題 2.38 ([Shim73, pp. 461–464, Lemma 3.3])

A を自然数，α を非負整数とし，ϕ を mod A の原始的な Dirichlet 指標とする．$\alpha > 0$ または $A > 1$ のとき，次の無限級数

$$H_\alpha(s,z,\phi) = \pi^{-s}\Gamma(s)y^s\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\(m,n)\neq(0,0)}}\phi(n)(Amz+n)^{\alpha}\left|Amz+n\right|^{-2s}$$

は $\mathrm{Re}(s) > \dfrac{\alpha}{2}+1$ で絶対収束し，全 s 平面に正則関数として解析接続され，次の関数等式

$$H_\alpha(\alpha+1-s,z,\phi) \quad = (-1)^{\alpha}G(\phi)A^{3s-\alpha-2}z^{\alpha}H_\alpha\left(s,-\frac{1}{Az},\overline{\phi}\right)$$

を満たす．さらに，4 と A の倍数である B に対し，$f(z)\in S_{k+\frac{1}{2}}(\widetilde{\Gamma(B)})$，$g(z)\in M_{\mu+\frac{1}{2}}(\widetilde{\Gamma(B)})$ をとる．このとき，$\alpha = k-\mu \geq 0$ とすると，以下の積分

$$\int_{\Gamma(B)\backslash\mathbb{H}} f(z)\overline{g}(z)y^{\mu+\frac{1}{2}}H_\alpha(s,z,\phi)d_0 z$$

は任意の s に対して絶対収束し，s の関数として任意の垂直帯領域で有界である．

前の補題を用いるためには指標は原始的である必要がある．そこで今からは

$$c(z,s)=\sum_{m,n}\phi(n)(Nr^2mz+n)^{k-\nu}\left|Nr^2mz+n\right|^{2\nu-1-2s}$$

を原始的な指標を用いて書き改めていく．

$$\alpha-k-\nu,\ \beta=\nu+\frac{1}{2},\ 2t=2s-2\nu+1$$

とおく．ϕ_0，χ_0 をそれぞれ ϕ, χ_1 が誘導する原始的な指標とし，χ_1 の導手を M とする．このとき，$\phi=\chi_1\psi$ であるから，ϕ_0 の導手は Mr である．また，$N=MK$，$E=\prod_{\substack{p|N\\ p\nmid M}}p$ とする．このとき，

$$\phi(n)=\begin{cases}\phi_0(n) & ((n,E)=1)\\ 0 & ((n,E)>1)\end{cases}$$

であるから，(n,E) の約数 l に対し，$n=ln'$，$K=lk'$ とすれば Möbius 関数 $\mu(n)$ を用いて，

$$\begin{aligned}c(z,s)&=\sum_{m,n}\left(\sum_{0<l|(n,E)}\mu(l)\right)\phi_0(n)(Nr^2mz+n)^{\alpha}\left|Nr^2mz+n\right|^{-2t}\\&=\sum_{m,n}\sum_{0<l|(n,E)}\mu(l)\phi_0(n')(Mlk'r^2mz+ln')^{\alpha}\left|Mlk'r^2mz+ln'\right|^{-2t}\\&=\sum_{l|E}\mu(l)\phi_0(l)l^{\alpha-2t}\sum_{m,n}\phi_0(n)(Mk'r^2mz+n')^{\alpha}\left|Mk'r^2mz+n'\right|^{-2t}\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，

$$\begin{aligned}c^*(z,s)&=\pi^{-t}\Gamma(t)y^tc(z,s),\\H_\alpha(t,z,\phi_0)&=\pi^{-t}\Gamma(t)y^t\sum_{m,n}\phi_0(n)(Mrmz+n)^{\alpha}|Mrmz+n|^{-2t}\end{aligned}$$

とおくと，

$$c^*(z,s)=(Kr)^{-t}\sum_{l|E}\mu(l)\phi_0(l)l^{\alpha-t}H_\alpha(t,k'rz,\phi_0)$$

が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned}&2\cdot(4\pi)^{-s}\Gamma(s)\pi^{-t}\Gamma(t)\sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)A_1(n)n^{\nu-2s}\\&=\int_{F_0}f(z)\overline{h}_{\overline{\psi}}y^{\beta}c^*(z,t)d_0z\\&=(Kr)^{-t}\sum_{l|E}\mu(l)\phi_0(l)l^{\alpha-t}\int_{F_0}f(z)\overline{h}_{\overline{\psi}}y^{\beta}H_\alpha(t,k'rz,\phi_0)d_0z\end{aligned}$$

と書ける．最後に $H_\alpha(t,k'rz,\phi_0)$ が他の $H_\alpha(s,z',\phi')$ の部分和になっていることから，積分の部分に補題 2.38 を用いればよい．

(3) について

$$\Omega(s)=\int_{F_0}f(z)\overline{h}_{\overline{\psi}}y^{\beta}c^*(z,t)d_0z$$

とする．大まかな方針としては，

$$“\Omega(s)\text{ を変数変換し，積分}\int_{F_0}\text{と和}\sum_{m,n}\text{を}\int_{F_\infty}\text{の積分にまとめ直し，}$$

$$\text{関数等式を満たす Dirichlet 級数}\sum_{n=1}^{\infty}b(n)n^{-s}\text{ を具体的に構成する}”$$

というものである．前にも述べたように，一般の場合にこの議論を行うのは容易ではない．実際，一般の場合では，今回の様に 1 つの積分にまとめ計算していくことができないため，2 つの積分にまとめた後，それぞれの積分を計算し，最後に 1 つにまとめるという過程がさらに必要となる．よって今回は 1 つの積分にまとめ計算していくことができる特別な場合のみ確認をし，証明の概要をみることとする．

まず，s を $k+\nu-s$ に取り替えると，$2t=2s-2\nu+1$ であったから，t は $\alpha+1-t$ に取り替えられる．よって，

$$\Omega(k+\nu-s)=\int_{F_0}f(z)\overline{h}_{\overline{\psi}}y^{\beta}c^*(z,\alpha+1-t)d_0z$$

である．ここで，$c^*(z,\alpha+1-t)$ は補題 2.38 を用いれば，

$$\begin{aligned}
&c^*(z,\alpha+1-t)\\
&=(Kr)^{t-\alpha-1}\sum_{l|E}\mu(l)\phi_0(l)l^{t-1}H_\alpha(\alpha+1-t,k'rz,\phi_0)\\
&=(Kr)^{t-\alpha-1}\sum_{l|E}\mu(l)\phi_0(l)l^{t-1}(-1)^\alpha G(\phi_0)(Mr)^{3t-\alpha-2}(k'rz)^\alpha H_\alpha\left(t,-\frac{1}{Mk'r^2z},\overline{\phi_0}\right)\\
&=\phi(-1)G(\phi_0)(Mr)^{3t-\alpha-2}(Kr)^{t-1}z^\alpha\sum_{l|E}\mu(l)\phi_0(k)l^{t-\alpha-1}H_\alpha\left(t,-\frac{l}{N'r^2z},\overline{\phi_0}\right)
\end{aligned}$$

と書き直すことができる．ここで，

$$\begin{aligned}
\tau_N&=\left(\begin{bmatrix}0&-1\\N&0\end{bmatrix},N^{-\frac{k}{2}-\frac{1}{4}}(-iz)^{-k-\frac{1}{2}}\right),\\
g(z)&=f(z)\Big|[\tau_N]_{k+\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

とすると，τ_N は Atkin-Lehner 作用素（詳しくは [AL70] を見よ）であるから，$g(z)\in S_{k+\frac{1}{2}}(N,\chi')$（ただし，$\chi'(d)=\chi(d)\left(\dfrac{N}{d}\right)$）で，

$$f\left(-\frac{1}{Nr^2z}\right)=N^{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}}(-ir^2z)^{k+\frac{1}{2}}g(r^2z)$$

が成り立つ．また，$N=4P$ として，命題 2.30 を用いれば，

$$h_{\overline{\psi}}\left(-\frac{1}{Nr^2z}\right)=(-1)^\nu r^{-\frac{1}{2}}G(\overline{\psi})\overline{h}_\psi(Pz)$$

が成り立つ．故に，

$$\begin{aligned}
&f\overline{h}_{\overline{\psi}}y^\beta\left(-\frac{1}{Nr^2z}\right)\\
&=\{N^{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}}(-ir^2z)^{k+\frac{1}{2}}g(r^2z)\}\times\{\overline{(-1)^\nu r^{-\frac{1}{2}}G(\overline{\psi})\overline{h}_\psi(Pz)}\}\times\left(\frac{1}{Nr^2|z|^2}\mathrm{Im}(z)\right)^\beta\\
&=2^\alpha r^{k+\alpha}P^{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}}i^{\nu-\alpha}\overline{G(\overline{\psi})}z^\alpha g(r^2z)\overline{h}_\psi(Pz)y^\beta
\end{aligned}$$

が得られる．上式の定数部 $2^\alpha r^{k+\alpha}P^{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}}i^{\nu-\alpha}\overline{G(\overline{\psi})}$ を T とおく．このとき，

$$
\begin{aligned}
&\mathit{\Omega}(k+\nu-s)\\
&=\int_{F_0} f(z)\overline{h}_{\overline{\psi}}y^\beta c^*(z,\alpha+1-t)d_0z\\
&=\int_{F_0} f(z)\overline{h}_{\overline{\psi}}y^\beta \phi(-1)G(\phi_0)(Mr)^{3t-\alpha-2}(Kr)^{t-1}z^\alpha\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\times\sum_{l|E}\mu(l)\phi_0(l)l^{t-\alpha-1}H_\alpha\left(t,-\frac{l}{N'r^2z},\overline{\phi_0}\right)d_0z\\
&=\int_{F_0} f\overline{h}_{\overline{\psi}}y^\beta\left(-\frac{1}{Nr^2z}\right)\phi(-1)G(\phi_0)(Mr)^{3t-\alpha-2}(Kr)^{t-1}\left(-\frac{1}{Nr^2z}\right)^\alpha\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\times\sum_{l|E}\mu(l)\phi_0(l)l^{t-\alpha-1}H_\alpha(t,lz,\overline{\phi_0})d_0z\\
&=\int_{F_0} T\cdot z^\alpha g(r^2z)\overline{h}_\psi(Pz)y^\beta\phi(-1)G(\phi_0)(Mr)^{3t-\alpha-2}(Kr)^{t-1}\left(-\frac{1}{Nr^2z}\right)^\alpha\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\times\sum_{l|E}\mu(l)\phi_0(l)l^{t-\alpha-1}H_\alpha(t,lz,\overline{\phi_0})d_0z\\
&=\int_{F_0} T\cdot G(\phi_0)(Nr)^{-\alpha}(Mr)^{3t-\alpha-2}(Kr)^{t-1}g(r^2z)\overline{h}_\psi(Pz)y^\beta\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\times\sum_{l|E}\mu(l)\phi_0(l)l^{t-\alpha-1}H_\alpha(t,lz,\overline{\phi_0})d_0z\\
&=S\sum_{l|E}\left(\int_{F_0} g(r^2z)\overline{h}_\psi(Pz)y^\beta H_\alpha(t,lx,\overline{\phi_0})d_0z\right)\mu(l)\phi_0(l)l^{t-\alpha-1}\\
&=S\sum_{l|E}\mu(l)\phi_0(l)l^{t-\alpha-1}I_l(t)
\end{aligned}
$$

と変形できる．ただし，上の式変形で，

$$
\begin{aligned}
S&=T\cdot G(\phi_0)(Nr)^{-\alpha}(Mr)^{3t-\alpha-2}(Kr)^{t-1}=T\cdot G(\phi_0)r^{4t-3\alpha-3}M^{3t-2\alpha-2}K^{t-\alpha-1},\\
I_l(t)&=\int_{F_0} g(r^2z)\overline{h}_\psi(Pz)y^\beta H_\alpha(t,lx,\overline{\phi_0})d_0z
\end{aligned}
$$

とおいた．

ここで，

$$
\begin{aligned}
B'(z)&=g(r^2z)\overline{h}_\psi(Pz)y^{s+1},\\
J'(\gamma,z)&=\overline{\phi_0(d)}(cz+d)^\alpha|cz+d|^{-2t}
\end{aligned}
$$

とおくと，$g(z)\in S_{k+\frac{1}{2}}(N,\chi')$，$h_{\overline{\psi}}(Pz)\in M_{\nu+\frac{1}{2}}(4Pr^2,\overline{\psi_1})$ だから，任意の $\gamma\in\mathit{\Gamma}_0(Nr^2)$ に対し，

$$B'(\gamma(z))=B'(z)J'(\gamma,z)$$

となることが容易に確認できる．

以下，

$$r=1,\ N=M$$

の場合のみ確認していく．このとき，

$$\nu=0,\ \alpha=k,\ \beta=\frac{1}{2},\ t=s+\frac{1}{2}$$

である．

いま，前に与えた式を改めて書けば，

$$\begin{aligned}\Omega(k-s) &= S\int_{F_0} g(r^2z)\overline{h}_\psi(Pz)y^{\frac{1}{2}}H_k(t,z,\overline{\phi_0})d_0z \\ &= S\cdot\pi^{-s}\Gamma(s)\int_{F_0} B'(z)\sum_{m,n}\overline{\phi_0(n)}(Nmz+n)^k\left|Nmz+n\right|^{-2t}\end{aligned}$$

となる．ここで，無限和の部分を整理すると，

$$\begin{aligned}&\sum_{m,n}\overline{\phi_0(n)}(Nmz+n)^k\left|Nmz+n\right|^{-2t} \\ &=\sum_{l\in\mathbb{N}}\sum_{(m,n)=1}\overline{\phi_0(l)\phi_0(n)}l^{k-2s-1}(Nmz+n)^k\left|Nmz+n\right|^{-2t} \\ &=\left(\sum_{l\in\mathbb{N}}\overline{\phi_0(l)}l^{k-2s-1}\right)\left(\sum_{(m,n)=1}\overline{\phi_0(n)}(Nmz+n)^k\left|Nmz+n\right|^{-2t}\right) \\ &=L(2s+1-k,\overline{\phi_0})\sum_{(m,n)=1}\overline{\phi_0(n)}(Nmz+n)^k\left|Nmz+n\right|^{-2t} \\ &=2L(2s+1-k,\overline{\phi_0})\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(N)}J'(\gamma,z)\end{aligned}$$

となる．よって，

$$\begin{aligned}&\int_{F_0} g(r^2z)\overline{h}_\psi(Pz)y^{\frac{1}{2}}H_k(t,z,\overline{\phi_0})d_0z \\ &=2\cdot\pi^{-t}\Gamma(t)L(2s+1-k,\overline{\phi_0})\int_{F_0}B'(z)\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(N)}J'(\gamma,z)d_0z \\ &=2\cdot\pi^{-t}\Gamma(t)L(2s+1-k,\overline{\phi_0})\int_{F_\infty}g(r^2z)\overline{h}_\psi(Pz)y^{s+1}d_0z\end{aligned}$$

が成り立つ．今，$g(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b(n)q^n$ とすると，$h_\psi(Pz)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}}q^{Pm^2}$ であるから，

$$\begin{aligned}g(z)\overline{h_\psi(Pz)} &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b(n)q^n\sum_{m\in\mathbb{Z}}q^{Pm^2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m\in\mathbb{Z}}b(n)\boldsymbol{e}((n-Pm^2)x)\exp(-2\pi(n+Pm^2)y)\end{aligned}$$

と書ける．よって，

$$\begin{aligned}
&\int_{F_\infty} g(r^2z)\overline{h}_\psi(Pz)y^{s+1}d_0z \\
&= \int_{F_\infty} g(r^2z)\overline{h}_\psi(Pz)y^{s-1}dxdy \\
&= \int_0^\infty \int_0^1 \frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty \sum_{m\in\mathbb{Z}} b(n)\boldsymbol{e}((n-Pm^2)x)\exp(-2\pi(n+Pm^2)y)y^{s-1}dxdy \\
&= \int_0^\infty \int_0^1 \sum_{n=1}^\infty \Biggl\{ \left(\sum_{m=1}^\infty b(n)\boldsymbol{e}((n-Pm^2)x)\exp(-2\pi(n+Pm^2)y) \right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{2}b(n)\boldsymbol{e}(x)\exp(-2\pi ny) \Biggr\} y^{s-1}dxdy \\
&= \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty b(Pm^2)\exp(-4\pi Pm^2y)y^{s-1}dy \\
&= (4\pi P)^{-s}\mathit{\Gamma}(s)\sum_{n=1}^\infty b(Pm^2)m^{-2s}
\end{aligned}$$

が成立する．以上をまとめれば，

$$\mathit{\Omega}(k-s) = 2S\cdot\pi^{-t}(4\pi P)^{-s}\mathit{\Gamma}(t)\mathit{\Gamma}(s)L(2s+1-k,\overline{\phi_0})\mathit{\Gamma}(s)\sum_{n=1}^\infty b(Pm^2)m^{-2s}$$

となる．最後に $2s$ を s と置き直し，$\mathit{\Gamma}$ 関数を 1 つにまとめ，定数項を整理することにより，求めたかった Dirichlet 級数 $\sum_{n=1}^\infty b'(n)n^{-s}$ が得られ，定理 2.35 が証明される． □

第 3 章

Kohnen-Zagier 公式とその一般化

この章では坂田裕氏の論文 [Sak08] による Kohnen-Zagier 公式の一般化について概説を行う．まずはじめに 3.1 節で Kohnen plus 空間上で発見された Kohnen-Zagier 公式とはどのようなものかを確認する．その後，[Sak08] の主定理の証明を概説する．またこの章を通じて，N は正の奇数，$M = 4N$，D は $(-1)^k D > 0$ を満たす基本判別式とする．

3.1 Kohnen-Zagier 公式

まずは Kohnen plus 空間と指標付きの Kohnen plus 空間を定義し，Kohnen-Zagier 公式がどのような式であるかを述べる．

定義 3.1 (Kohnen plus 空間)

$M_{k+\frac{1}{2}}(\widetilde{\Gamma_0(4N)})$，$S_{k+\frac{1}{2}}(\widetilde{\Gamma_0(4N)})$ の部分空間 $M^+_{k+\frac{1}{2}}(N)$，$S^+_{k+\frac{1}{2}}(N)$ を，

$$M^+_{k+\frac{1}{2}}(N) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n \in M_{k+\frac{1}{2}}(\widetilde{\Gamma_0(4N)}) \,\middle|\, (-1)^k n \equiv 2, 3 \pmod 4 \text{ の時，} a(n) = 0 \right\},$$

$$S^+_{k+\frac{1}{2}}(N) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n \in S_{k+\frac{1}{2}}(\widetilde{\Gamma_0(4N)}) \,\middle|\, (-1)^k n \equiv 2, 3 \pmod 4 \text{ の時，} a(n) = 0 \right\}$$

で定義する．

また，指標付き Kohnen plus 空間を定義する．

定義 3.2 (指標付き Kohnen plus 空間)

χ を mod N の Dirichlet 指標とし，χ_2 を χ の 2-primary 成分とする．この時，$M_{k+\frac{1}{2}}(4N, \chi)$，$S_{k+\frac{1}{2}}(4N, \chi)$ の部分空間 $M^+_{k+\frac{1}{2}}(N, \chi)$，$S^+_{k+\frac{1}{2}}(N, \chi)$ を，

$$M^+_{k+\frac{1}{2}}(N, \chi) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n \in M_{k+\frac{1}{2}}(4N, \chi) \,\middle|\, \chi_2(-1)(-1)^k n \equiv 2, 3 \pmod 4 \text{ の時，} a(n) = 0 \right\},$$

$$S^+_{k+\frac{1}{2}}(N, \chi) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n \in S_{k+\frac{1}{2}}(4N, \chi) \,\middle|\, \chi_2(-1)(-1)^k n \equiv 2, 3 \pmod 4 \text{ の時，} a(n) = 0 \right\}$$

で定義する．

W. Kohnen は [Koh80] で次のことを示した．これは Shimura [Shim73] が論文中であげた問題に答えを与えている．

命題 3.3 ([Koh80, p. 252, Theorem 2])
志村対応の $M^+_{k+\frac{1}{2}}(\widetilde{\Gamma_0(4)})$，$S^+_{k+\frac{1}{2}}(\widetilde{\Gamma_0(4)})$ への制限はそれぞれ $M_{2k}(\Gamma)$，$S_{2k}(\Gamma)$ への同型写像である．

さて，これで Kohnen-Zagier 公式がどんなものか述べることができる．以下がその主張である．

定理 3.4 (Kohnen-Zagier 公式, [KZ81, p. 177, Theorem 1])
$f(z)$ を $S_{2k}(\Gamma)$ を正規化された Hecke 同時固有形式，$g(z)$ を $f(z)$ に対応する $S^+_{k+\frac{1}{2}}(\widetilde{\Gamma_0(4)})$ の元とし，その Fourier 展開を $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n)q^n$ とする．また D を $(-1)^k D > 0$ を満たす基本判別式とする．この時,

$$\frac{c(|D|)^2}{\langle g, g\rangle} = \frac{(k-1)!}{\pi^k}|D|^{k-\frac{1}{2}}\frac{L(f,D,k)}{\langle f, f\rangle}$$

が成り立つ．

重さ整数の cusp 形式の空間では‘重複度 1’が成り立っている．‘重複度 1’とは,

“固有値がすべて等しい 2 つの Hecke 同時固有形式はスカラー倍の違いしかない”

という性質である．命題 3.3 からもわかるように，実は $S^+_{k+\frac{1}{2}}(\widetilde{\Gamma_0(4)})$ でも‘重複度 1’が成立する．このことが定理 3.4 を示すことができることに大きく影響している．しかし，4 より大きいレベルに対しては，一般には‘重複度 1’は成立しない．この重複度が一般の場合の Kohnen-Zagier 公式を記述しようというのが Sakata [Sak08] であり，次節以降に述べるものである．

3.2 坂田裕氏による Kohnen-Zagier 公式の一般化

ここからは坂田裕氏の論文 [Sak08] による Kohnen-Zagier 公式の一般化について概説する．この節では記号の準備を行う．詳しく定義を述べられなかった記号および証明を省略した命題などに関しては Ueda の論文 [Ued88], [Ued91], [Ued88], [Ued93], [Ued98] や坂田の原論文 [Sak08] などを見てほしい．記号を定義した後，[Sak08] の主定理の主張を述べる．この証明は 3.3 節で紹介する．また最後に，[Sak08] の主定理の応用についても紹介する．

まず，$I(N)$，$\Pi(N)$，$\Pi_{\mathrm{even}}(N)$，$\Pi_{\mathrm{odd}}(N)$，$\Pi_n(N)$，$\Pi^*_n(N)$ を定義する．

定義 3.5
自然数 n に対し,

$$\begin{aligned}
I(N) &= \{p|N : \text{素数} \,|\, \mathrm{ord}_p(N) = 1\}\,, \\
\Pi(N) &= \{p|N : \text{素数} \,|\, \mathrm{ord}_p(N) \geq 2\}\,, \\
\Pi_{\mathrm{even}}(N) &= \{p \in \Pi(N) \,|\, \mathrm{ord}_p(N) \in 2\mathbb{Z}\}\,, \\
\Pi_{\mathrm{odd}}(N) &= \{p \in \Pi(N) \,|\, \mathrm{ord}_p(N) \in 2\mathbb{Z}+1\}\,, \\
\Pi_n(N) &= \{p \in \Pi(N) \,|\, \mathrm{ord}_p(N) = n\}\,, \\
\Pi^*_n(N) &= \left\{p \in \Pi_n(N) \,\middle|\, \left(\frac{-1}{p}\right) = 1\right\}
\end{aligned}$$

と定義する．また，

$$\begin{aligned} M_1 &= \prod_{p\in I(N)} p, \\ \nu(N) &= \#\{p|N : \text{素数}\ \}, \\ \nu_1 &= \#I(N), \\ \nu_2 &= \#\Pi(N)_{\mathrm{even}}, \\ \nu_3 &= \#\Pi(N)_{\mathrm{odd}} \end{aligned}$$

と定める．

次に，いくつか作用素を定義する．まず，作用素 δ_m，$U(m)$，R_m を定義する．

定義 3.6

m を自然数とする．この時，作用素 δ_m，$U(m)$，R_m を

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\boldsymbol{e}(nz)\Big|\delta_m &= \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\boldsymbol{e}(mnz), \\ \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\boldsymbol{e}(nz)\Big|U(m) &= \sum_{n=1}^{\infty} a(mn)\boldsymbol{e}(nz), \\ \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\boldsymbol{e}(nz)\Big|R_m &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{m}\right) a(n)\boldsymbol{e}(nz) \end{aligned}$$

と定める．$U(m)$ を **shift 作用素**，R_m を **twisting 作用素**という．

次に，作用素 $\Big|[W_Q]_{2k}$ を定義する．

定義 3.7

$Q||N$ とする．また $\gamma_Q \in SL_2(\mathbb{Z})$ で以下の条件を満たすものをとる：

$$\gamma_Q \equiv \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & (\mathrm{mod}\ Q), \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \left(\mathrm{mod}\ \dfrac{N}{Q}\right) \end{cases}$$

この時，行列 W_Q を

$$W_Q = \gamma_Q \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

と定める．$\Big|[W_Q]_{2k}$ を **Atkin-Lehner 作用素**という．

注意 3.8

[Ued88] により，$\Big|[W_Q]_{2k}$ は γ_Q の取り方によらないことが示されている．

これらの作用素に関して，次が成り立つ．

補題 3.9 ([Sak08, p. 76, Lemma 1])
p を M と互いに素な奇素数とする．この時，cusp 形式 $f(z) \in S_{2k}(pM)$ に対し，

$$f\Big|R_p W_{p^2} = \left(\frac{-1}{p}\right) f\Big|R_p$$

が成り立つ．

次に保型形式の部分空間について記号を定義する．まず，重さ整数の $S_{2k}(N)$ の oldform や newform のなすについて定義する．

定義 3.10 (oldform, newform, [DS05, pp. 187–188, Definition 5.6.1])
oldform のなす空間 $S_{2k}^{\mathrm{old}}(N)$ を

$$S_{2k}^{\mathrm{old}}(N) = \sum_{\substack{p|N \\ p:\text{素数}}} i_p((S_k(Np^{-1}))^2)$$

と定義する．ここで，写像 i_p は

$$\begin{array}{cccc} i_p\colon & (S_k(Np^{-1}))^2 & \longrightarrow & S_k(N), \\ & \cup & & \cup \\ & (f,g) & \longmapsto & f + g\left|\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_k\right. \end{array}$$

である．この直交補空間を $S_{2k}^{\mathrm{new}}(N)$ と書き，**newform のなす空間**という．

次に‘very newform’全体の空間 $S_{2k}^{2}(N)$ を定義する．

定義 3.11 ([Ued93])
$S_{2k}^{2}(N)$ を作用素 R_p $(p \in \Pi(N))$ によって N よりレベルの低い cusp 形式からリフトされた $S_{2k}(N)$ の元が生成する空間とする．$S_{2k}^{*}(N)$ を $S_{2k}^{\mathrm{new}}(N)$ での $S_{2k}^{2}(N)$ の直交補空間とする．$S_{2k}^{*,\tau}(N)$ を $S_{2k}^{*}(N)$ の部分空間で，Atkin-Lehner 作用素 $W_p^{\mathrm{ord_p(N)}}$ に対する固有値が $\tau(p)$ である Hecke 固有形式が生成する空間とする．

Kohnen plus 空間 $S_{k+\frac{1}{2}}^{+}(N)$ の oldform や newform のなす空間を以下のように定義する．

定義 3.12 ([Ued93], [Ued98])
$S_{k+\frac{1}{2}}^{+}(N)$ の **oldform のなす空間** $\mathfrak{O}_{k+\frac{1}{2}}^{+}(N)$ を

$$\mathfrak{O}_{k+\frac{1}{2}}^{+}(N) = \sum_{\substack{0<B|N \\ B\neq N}} \sum_{0<A|\frac{N}{B}} \sum_{\xi} S_{k+\frac{1}{2}}^{+}(B,\xi)\Big|\delta_A + \sum_{\substack{0<B|N \\ B\neq N}} \sum_{0<A|(\frac{N}{B})^2} \sum_{\xi} \sum_{\substack{(e_l)_{l\in\Pi(N)} \\ 0\leq e_l\leq 2}} S_{k+\frac{1}{2}}^{+}(B,\xi)\Big|U(A) \prod_{l\in\Pi(N)} R_l{}^{e_l}$$

で定める．（ここで，$\sum_{\xi}$ は $\xi\left(\frac{A}{-}\right) = 1$ となるすべての mod N の偶 2 次指標をわたる和である．）

また，$\mathfrak{O}_{k+\frac{1}{2}}^{+}(N)$ の $S_{k+\frac{1}{2}}^{+}(N)$ での直交補空間を $\mathfrak{N}_{k+\frac{1}{2}}^{+}(N)$ で表す．$\mathfrak{N}_{k+\frac{1}{2}}^{+}(N)$ を $S_{k+\frac{1}{2}}^{+}(N)$ の **newform のなす空間**という．

δ_A，$U(A)$，R_l と $\widetilde{T}_{n^2}$ の可換性から $\mathfrak{D}^+_{k+\frac{1}{2}}(N)$ と $\mathfrak{N}^+_{k+\frac{1}{2}}(N)$ はこれらの作用素で不変である．よって $\mathfrak{N}^+_{k+\frac{1}{2}}(N)$ は次の直交分解

$$\mathfrak{N}^+_{k+\frac{1}{2}}(N) = \bigoplus_{\kappa\in\mathrm{Map}(\Pi(N),\{\pm1\})} \mathfrak{N}^{+,\kappa}_{k+\frac{1}{2}}(N)$$

を持つ．ここで，

$$\mathfrak{N}^{+,\kappa}_{k+\frac{1}{2}}(N) = \left\{ g \in \mathfrak{N}^+_{k+\frac{1}{2}}(N) \,\middle|\, \text{すべての } p \in \Pi(N) \text{ に対し}, g\middle| R_p = \kappa(p)g \right\}$$

である．$\mathfrak{N}^{+,\kappa}_{k+\frac{1}{2}}(N)$ は $\widetilde{T}_{p^2}$ と $U(p^2)$ の同時固有形式からなる直交基底を持つ．

次に，‘Hecke 代数上の同型’ について定める．まず，有限次元複素ベクトル空間 V 上の線形作用素 T に対し，その trace を $\mathrm{tr}(T;V)$ で表す．また，作用素 $\widetilde{T}_{k+\frac{1}{2},N,\chi}(n^2)$ を次のように定義する．

定義 3.13 ($\widetilde{T}_{k+\frac{1}{2},N,\chi}(n^2)$)

$\varepsilon = \chi(-1)$，$\alpha(-1)^{[\frac{k+1}{2}]}\varepsilon 2\sqrt{2}$，$\beta = -\dfrac{\alpha}{2}$，$\mathcal{Q}_{k+\frac{1}{2},4N,\chi_1} = \left[\Gamma_0\widetilde{(4N,\chi_1)}\xi_{k+\frac{1}{2},\varepsilon}\Gamma_0\widetilde{(4N,\chi_1)}\right]$ とし，$S_{k+\frac{1}{2}}(N,\chi)$ 上の射影 $\mathrm{pr} = \mathrm{pr}_{k+\frac{1}{2},4N,\chi_1}$ を

$$\mathrm{pr} = \frac{1}{\alpha-\beta}(\mathcal{Q}_{k+\frac{1}{2},4N,\chi_1} - \beta)$$

とする．この時，

$$\widetilde{T}_{k+\frac{1}{2},N,\chi}(p^2) = \nu_p p^{k-\frac{3}{2}} \left[\Gamma_0\widetilde{(4N,\chi_1)} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{bmatrix}, p^{k+\frac{1}{2}} \right) \Gamma_0\widetilde{(4N,\chi_1)}\right] \mathrm{pr}$$

と定める．ここで，

$$\nu_p = \begin{cases} 1 & (p \neq 2), \\ \dfrac{3}{2} & (p = 2) \end{cases}$$

である．

この記号の下，Hecke 代数上の加群として同型であるということを以下のように定める．

定義 3.14 (Hecke 代数上の加群として同型)

$S_{2k}(N)$ の部分空間 S と $S^+_{k+\frac{1}{2}}(N,\chi)$ の部分空間 $\widetilde{S}$ が

$$\mathrm{tr}(\widetilde{T}_{k+\frac{1}{2},M,\chi}(n^2);\widetilde{S}) = \mathrm{tr}(\widetilde{T}_{2k,N}(n);\widetilde{S})$$

を満たすとき，S と $\widetilde{S}$ は **Hecke 代数上の加群として同型**であるという．

Sakata [Sak08] によって，次の同型が得られている．

定理 3.15 ([Sak08, pp. 70–72, Theorem 1])

$\kappa \in \mathrm{Map}(\Pi(N),\{\pm1\})$ とすると，次の Hecke 代数上の加群としての同型が得られる：

$$\begin{aligned} &\mathfrak{N}^{+,\kappa}_{k+\frac{1}{2}}(N) \\ &\simeq S^{*,\tau_\kappa}_{2k}(N) \oplus \bigoplus_{\substack{\Pi(N)_2=I+J+K \\ I+J\neq\emptyset,\ I,J\subseteq\Pi(N)^*_2}} \bigoplus_{\widetilde{\tau_\kappa}} \mathfrak{N}^{*,\widetilde{\tau_\kappa}}_{2k}\left(M_1 \prod_{l\in J} l \prod_{p\in\Pi(N)-(I+J)} p^{\mathrm{ord}_p(N)} \right) \Bigg| \prod_{p\in I+J} R_p \end{aligned}$$

ここで，

$$\tau_\kappa(p)=\begin{cases}1 & (p\in\Pi(N)_{\mathrm{even}}),\\ \kappa(p)\left(\dfrac{-1}{p}\right)^k & (p\in\Pi(N)_{\mathrm{odd}})\end{cases}$$

$$\widetilde{\tau_\kappa}(p)=\begin{cases}1 & (p\in\Pi(N)_{\mathrm{even}}),\\ \kappa(p)\left(\dfrac{-1}{p}\right)^k\displaystyle\prod_{q\in I+J}\left(\dfrac{p}{q}\right) & (p\in\Pi(N)_{\mathrm{odd}})\end{cases}$$

である．

最後に，D-志村対応 $\mathcal{S}_{k,N,D}$ と D-新谷対応 $\mathcal{S}^*_{k,N,D}$ を定義する．

まず，新谷対応を定義するのに必要な“周期”を定義する．m を $(-1)^k m\equiv 0,1 \pmod 4$ を満たす自然数とし，$\Delta=|D|m$ とする．また，二次形式 $Q=aX^2+bXY+cY^2$ を $[a,b,c](X,Y)$ や単に $[a,b,c]$ で表す．この時，

$$\mathcal{Q}_{N,\Delta}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\left\{[a,b,c]\,\middle|\,b^2-4ac=\Delta,\ N|a\right\}$$

と定める．また，$\mathit{\Gamma}_0(N)$ は $\mathcal{Q}_{N,\Delta}$ へ一次変換で作用するとする．つまり，

$$[a,b,c]\circ\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}(X,Y)=[a,b,c](\alpha X+\beta Y,\gamma X+\delta Y)$$

である．また，$N'||N$ に対し，$W_{N'}$ の $\mathcal{Q}_{N,\Delta}/\mathit{\Gamma}_0(N)$ への作用を

$$Q\circ W_{N'}=\frac{1}{N'}Q\circ\begin{bmatrix}\alpha N' & \beta\\ \gamma N & \delta N'\end{bmatrix}$$

と定める．（ここで，α，β，γ，δ は整数で $\alpha\delta N'-\beta\gamma\dfrac{N}{N'}=1$ である．）

この状況の下，周期 $r_{k,N}(f;D,(-1)^k m)$ を定義する．

定義 3.16 ($\mathcal{Q}_{N,\Delta}/\mathit{\Gamma}_0(N)$ に関連する周期)

f を $S_{2k}(N)$ の元とする．この時，f の $\mathcal{Q}_{N,\Delta}/\mathit{\Gamma}_0(N)$ に関連する周期 $r_{k,N}(f;D,(-1)^k m)$ を

$$r_{k,N}(f;D,(-1)^k m)=\sum_{Q\in\mathcal{Q}_{N,\Delta}/\mathit{\Gamma}_0(N)}\omega_D(Q)\int_{C_Q}f(z)Q(z,1)^{k-1}dz$$

と定義する．ここで，$Q=[a,b,c]$ に対し，

$$\omega_D(Q)=\begin{cases}0 & ((a,b,c,D)>1),\\ \left(\dfrac{D}{r}\right) & ((a,b,c,D)=1)\end{cases}$$

であり，積分路 C_Q は

$$C_Q=\begin{cases}\text{半円 } a|z|^2+b\,\mathrm{Re}(z)+c=0 \text{ の} \mathit{\Gamma}_0(N)\backslash\mathbb{H} \text{ での像} & (a\neq 0),\\ \text{直線 } b\,\mathrm{Re}(z)+c=0 & (a=0)\end{cases}$$

であり，その向きは半円の場合，

$$\begin{cases}\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\text{ から }\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} & (a>0),\\ \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\text{ から }\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} & (a<0),\end{cases}$$

であり，直線の場合,

$$\begin{cases} \dfrac{-c}{b} \text{ から } i\infty & (a>0), \\ i\infty \text{ から } \dfrac{-c}{b} & (a<0) \end{cases}$$

である.

さて，これで準備が整った．まずは D-志村対応を定義する.

定義 3.17（D-志村対応）

$g(z) = \displaystyle\sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ (-1)^k n \equiv 0,1 \pmod 4}} c(n)q^n$ を $S^+_{k+\frac{1}{2}}(N)$ の元とする．この時，D-志村対応 $\mathcal{S}_{k,N,D}$ を

$$g\Big|\mathcal{S}_{k,N,D}(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{\substack{d|n \\ (d,N)=1}} \left(\frac{D}{d}\right) d^{k-1} c\left(\frac{|D|n^2}{d^2}\right)\right) q^n$$

と定める．$\mathcal{S}_{k,N,D}$ は $S^+_{k+\frac{1}{2}}(N)$ から $M_{2k}(N)$ への写像である.

注意 3.18

k が 2 以上の自然数，または N が立方因子を持たないとき，$\mathcal{S}_{k,N,D}$ は $S^+_{k+\frac{1}{2}}(N)$ から $S_{2k}(N)$ への写像である.

定義 3.19（D-新谷対応）

k を 2 以上の自然数とし，$f(z)$ を $S_{2k}(N)$ の元とする．この時，D-新谷対応 $\mathcal{S}^*_{k,N,D}$ を

$$f\Big|\mathcal{S}^*_{k,N,D} = (-1)^{[\frac{k}{2}]}2^k \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ (-1)^k n \equiv 0,1 \pmod 4}} \left(\sum_{t|N} \mu(t)\left(\frac{D}{t}\right) t^{k-1} r_{k,Nt}(f;D,(-1)^k nt^2)\right) q^n$$

と定義する.

D-志村対応 $\mathcal{S}_{k,N,D}$ と D-新谷対応 $\mathcal{S}^*_{k,N,D}$ の間には，次の関係がある.

定理 3.20（[Koh85, p. 240, Theorem 2]）

$\mathcal{S}_{k,N,D}$ の Petersson 内積での随伴写像は $\mathcal{S}^*_{k,N,D}$ である.

注意 3.21

次の 3 つに注意する.

(1) $\mathcal{S}_{k,N,D}$ と $\mathcal{S}^*_{k,N,D}$ は oldform の空間，及び newform の空間を保存する.
(2) $\mathcal{S}_{k,N,D}$ と $\mathcal{S}^*_{k,N,D}$ は Hecke 作用素と可換である.
(3) f が newform である時，新谷対応 $f|\mathcal{S}^*_{k,N,D}$ は

$$f\Big|\mathcal{S}^*_{k,N,D} = (-1)^{[\frac{k}{2}]}2^k \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ (-1)^k n \equiv 0,1 \pmod 4}} r_{k,N}(f;D,(-1)^k n)q^n$$

と書き表せる.

さて，これで [Sak08] の主定理を述べることができる.

定理 3.22 (Sakata [Sak08, p. 80, Theorem 3])

$f(z)$ を $S_{2k}^{\mathrm{new}}(N)$ の元で原始的なもので，Atkin-Lehner 作用素に対する固有値が

$$\tau(p) = \begin{cases} \left(\dfrac{D}{p}\right) & (p \in I(N) + \Pi(N)_{\mathrm{odd}}), \\ 1 & (p \in \Pi(N)_{\mathrm{even}} - (I + J)) \end{cases}$$

となるものとする．ここで，$I + J \subset \Pi(N)_2^*$ である．また $g(z)$ を D-志村対応で $f(z)$ と対応する $\mathfrak{N}_{k+\frac{1}{2}}^{+}(N)$ の元とする．この時，$g(z)$ を

$$g(z) = \sum_{\substack{\kappa \in \mathrm{Map}(\Pi(N), \{\pm 1\}) \\ \kappa \text{は } (\kappa_{\mathrm{odd}}) \text{ を満たす}}} g_\kappa(z)$$

と直交成分に分け，$g_\kappa(z)$ の Fourier 係数を $c_{g_\kappa}(n)$ とすると，

$$\sum_{\substack{\tau \in \mathrm{Map}(\Pi(N), \{\pm 1\}) \\ \kappa \text{は } (\tau_{\mathrm{odd}}) \text{ を満たす}}} \frac{|c_{g_\kappa}(|D|)|^2}{\langle g_\kappa, g_\kappa \rangle} = 2^{\nu(N)} \frac{(k-1)!}{\pi^k} |D|^{k-\frac{1}{2}} \frac{L(f, D, k)}{\langle f, f \rangle} \tag{3.1}$$

が成り立つ．

以上が [Sak08] の主定理である．また，この結果を応用して Luo-Ramakrishnan [LR97] の結果を一般化することができる．

定理 3.23 ([Sak08, pp. 83–84, Theorem 5])

κ は (τ_{odd}) を満たすものとする．g_1，$g_2 \in \mathfrak{N}_{k+\frac{1}{2}}^{+}(N)$ とし，それぞれの Fourier 級数を $c_{g_1}(n)$，$c_{g_2}(n)$ とする．このとき，基本判別式 D に対し，有限個を除いて

$$c_{g_1}(n) = c_{g_2}(n)$$

が成り立つならば，

$$g_1(n) = \pm g_2(n)$$

である．

3.3 定理 3.22 の証明

この節では Sakata [Sak08] による定理 3.22 の証明を紹介する．

証明

まず，κ を次の条件 (τ_{odd}) を満たすものとする：

$$(\tau_{\mathrm{odd}}) : \kappa(p) = \tau(p) \left(\frac{-1}{p}\right)^{-k} \prod_{q \in I+J} \left(\frac{p}{q}\right) \quad (p \in \Pi(N)_{\mathrm{odd}})$$

このとき，定理 3.15 より，$\mathfrak{N}_{k+\frac{1}{2}}^{+,\kappa}(N)$ の部分空間 $\mathfrak{N}_{k+\frac{1}{2}}^{*,\kappa}(N)$ に対し，

$$\mathfrak{N}_{k+\frac{1}{2}}^{*,\kappa}(N) \simeq S_{2k}^{*,\tau}\left(M_1 \prod_{i \in J} l \prod_{p \in \Pi(N)-(I+J)} p^{\mathrm{ord}_p(N)}\right) \Big| \prod_{p \in I+J} R_p$$

が得られる．よって，次の直交分解

$$\mathfrak{N}^{+}_{k+\frac{1}{2}}(N,f) \simeq \bigoplus_{\substack{\kappa\in\mathrm{Map}(\Pi(N),\{\pm1\})\\ \kappa\text{は }(\tau_{\mathrm{odd}})\text{ を満たす}}} \mathfrak{N}^{+,\kappa}_{k+\frac{1}{2}}(N)\cap\mathfrak{N}^{+}_{k+\frac{1}{2}}(N,f)$$

を得る．この直交分解を用いて，$g(z)$ を

$$g(z) = \sum_{\substack{\kappa\in\mathrm{Map}(\Pi(N),\{\pm1\})\\ \kappa\text{は }(\tau_{\mathrm{odd}})\text{ を満たす}}} g_\kappa(z) \quad (g_\kappa(z)\in\mathfrak{N}^{+,\kappa}_{k+\frac{1}{2}}(N))$$

と分解することができる．志村対応の定義から，これらの Fourier 係数には，

$$c_{g_\kappa}(n^2|D|) = c_{g_\kappa}(|D|)\sum_{\substack{d|n\\(d,N)=1}}\mu(d)\left(\frac{D}{d}\right)d^{k-1}a\left(\frac{n}{d}\right)$$

という関係がある．よって，$g_\kappa\Big|\mathcal{S}_{k,N,D} = c_{g_\kappa}(\big|D\big|)f$ を得る．故に，

$$\sum_{\substack{\kappa\in\mathrm{Map}(\Pi(N),\{\pm1\})\\ \kappa\text{は }(\tau_{\mathrm{odd}})\text{ を満たす}}} \frac{\overline{c_{g_\kappa}(|D|)}}{\langle g_\kappa,g_\kappa\rangle} g_\kappa\Big|\mathcal{S}_{k,N,D}(z) = \sum_{\substack{\kappa\in\mathrm{Map}(\Pi(N),\{\pm1\})\\ \kappa\text{は }(\tau_{\mathrm{odd}})\text{ を満たす}}} \frac{\big|c_{g_\kappa}(|D|)|^2}{\langle g_\kappa,g_\kappa\rangle}f(z)$$

が成り立つ．両辺の f との Petersson 内積を考えれば，

$$\sum_{\substack{\kappa\in\mathrm{Map}(\Pi(N),\{\pm1\})\\ \kappa\text{は }(\tau_{\mathrm{odd}})\text{ を満たす}}} \frac{\overline{c_{g_\kappa}(|D|)}}{\langle g_\kappa,g_\kappa\rangle}\langle f, g_\kappa\Big|\mathcal{S}_{k,N,D}\rangle = \sum_{\substack{\kappa\in\mathrm{Map}(\Pi(N),\{\pm1\})\\ \kappa\text{は }(\tau_{\mathrm{odd}})\text{ を満たす}}} \frac{\big|c_{g_\kappa}(|D|)|^2}{\langle g_\kappa,g_\kappa\rangle}\langle f,f\rangle$$

となる．左辺を計算すれば，

$$\sum_{\substack{\kappa\in\mathrm{Map}(\Pi(N),\{\pm1\})\\ \kappa\text{は }(\tau_{\mathrm{odd}})\text{ を満たす}}} \frac{\big|c_{g_\kappa}(|D|)\big|^2}{\langle g_\kappa,g_\kappa\rangle}\langle f,f\rangle = (-1)^{[\frac{k}{2}]}2^k r_{k,N}(f;D,(-1)^kD)$$

である．$\mathcal{Q}_{M,D^2}/\mathit{\Gamma}_0(M)$ の完全代表系は，

$$\{[0,D,\mu]\circ W_t \mid \mu \bmod D, 0<t||M\}$$

である．よって，$I(N)=\{p_{1,i}\mid 1\le i\le\nu_1\}$，$\Pi(N)_{\mathrm{even}}=\{p_{e,j}\mid 1\le j\le\nu_2\}$，$\Pi(N)_{\mathrm{odd}}=\{p_{o,l}\mid 1\le l\le\nu_3\}$ とおくと，$M=\prod_i p_{1,i}^{\alpha_i}\prod_j p_{e,j}^{\beta_j}\prod_l p_{o,l}^{\gamma_l}$ であるから，完全代表系は

$$\left\{[0,D,\mu]\circ W_{\prod_i p_{1,i}^{\alpha_i}}\circ W_{\prod_j p_{e,j}^{\beta_j}}\circ W_{\prod_l p_{o,l}^{\gamma_l}}\,\middle|\,\mu \bmod D, 0<t||M\right\}$$

と書き換えられる．よって，

$$
\begin{aligned}
&r_{k,N}(f;D,(-1)^kD)\\
&=\sum_{t||N}\sum_{\mu \bmod D}\omega_D([0,D,\mu]\circ W_t)\int_{C_{[0,D,\mu]\circ W_t}} f(z)(C_{[0,D,\mu]}\circ W_t(z,1))^{k-1}dz\\
&=\sum_{t||N}\sum_{\mu \bmod D}\omega_D([0,D,\mu]\circ W_t)\int_{C_{[0,D,\mu]}} f(z)\Big|W_t^{-1}(C_{[0,D,\mu]}(z,1))^{k-1}dz\\
&=\sum_{(\alpha_i,\beta_j,\gamma_l)}\sum_{\mu \bmod D}\omega_D([0,D,\mu]\circ W_{\prod_i p_{1,i}^{\alpha_i}}\circ W_{\prod_j p_{e,j}^{\beta_j}}\circ W_{\prod_l p_{o,l}^{\gamma_l}})\\
&\qquad\qquad\times\int_{C_{[0,D,\mu]}}\prod_i \tau(p_{1,i})^{\delta(\alpha_i)}\prod_j \tau(p_{e,j})^{\delta(\beta_j)}\prod_l \tau(p_{o,l})^{\delta(\gamma_l)} f(z)(Dz+\mu)^{k-1}dz
\end{aligned}
$$

となる．ただし，

$$
\delta(n)=\begin{cases}1 & (n\neq 0),\\ 0 & (n=0)\end{cases}
$$

である．ここで，直接計算を行えば，

$$
\omega_D([0,D,\mu]\circ W_{\prod_i p_{1,i}^{\alpha_i}}\circ W_{\prod_j p_{e,j}^{\beta_j}}\circ W_{\prod_l p_{o,l}^{\gamma_l}})=\omega([0,D,\mu])\prod_i\left(\frac{D}{p_{1,i}}\right)^{\alpha_i}\prod_l\left(\frac{D}{p_{o,l}}\right)^{\gamma_l}
$$

となるから，

$$
\begin{aligned}
r_{k,N}(f;D,(-1)^kD)=2^{\nu_2}&\left(\prod_i\left(\frac{D}{p_{1,i}}\right)^{\alpha_i}\tau(p_{1,i})^{\delta(\alpha_i)}\right)\left(\prod_l\left(\frac{D}{p_{o,l}}\right)^{\gamma_l}\tau(p_{o,l})^{\delta(\gamma_l)}\right)\\
&\times\sum_{\mu \bmod D}\int_{C_{[0,D,\mu]}} f(z)(Dz+\mu)^{k-1}dz
\end{aligned}
$$

である．そして，すべての $p\in I(N)+\Pi(N)_{\mathrm{odd}}$ に対し，$\tau(p)=\left(\dfrac{D}{p}\right)$ としてよい（[Sak08, p. 79, Remark 5]）から，

$$
r_{k,N}(f;D,(-1)^kD)=2^{\nu_1+\nu_2+\nu_3}\sum_{\mu \bmod D}\int_{C_{[0,D,\mu]}} f(z)(Dz+\mu)^{k-1}dz
$$

である．

最後に積分部分を計算すれば，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\mu \bmod D}\int_{C_{[0,D,\mu]}} f(z)(Dz+\mu)^{k-1}dz\\
&=\sum_{\mu \bmod D}\left(\frac{D}{\mu}\right)\int_{-\frac{\mu}{D}}^{i\infty} f(z)(Dz+\mu)^{k-1}dz\\
&=(iD)^{k-1}i\int_0^\infty\sum_{\mu \bmod D}\left(\frac{D}{\mu}\right)\sum_{n=1}^{\infty}a(n)t^{k-1}\boldsymbol{e}\left(\frac{n\mu}{|D|}+int\right)dt\\
&=(iD)^{k-1}i\left(\frac{D}{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}|D|^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{\mu}\right)a(n)t^{k-1}\boldsymbol{e}\left(\frac{n\mu}{|D|}+int\right)dt\\
&=(-1)^{[\frac{k}{2}]}(2\pi)^{-k}|D|^{k-\frac{1}{2}}\Gamma(k)L(f,D,k)
\end{aligned}
$$

となり，主定理を得る． □

参考文献

[AL70] A. O. L. Atkin, J. Lehner, *Hecke operator on $\Gamma_0(m)$*, Math. Ann. **185** (1970), 134–160.

[Cip83] B. A. Cipra, *On the Niwa-Shintani theta-kernel lifting of modular forms*, Nagoya Math. J. **91** (1983), 49–117.

[Del74] P. Deligne, *La conjecture de Weil. I*, Inst. Hautes tudes Sci. Publ. Math. **43** (1974), 273–307.

[DS05] F. Diamond, J. Shurman, *A first course in modular forms*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 228, Springer-Verlag, New York, 2005.

[GZ80] B. Gross, D. Zagier, *On the critical values of Hecke L-series. Abelian functions and transcendental numbers* (Colloq., École Polytech., Palaiseau, 1979), Mém. Soc. Math. France (N.S.) 1980/81, 49–54.

[Kob93] N. Koblitz, *Introduction to elliptic curves and modular forms*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 97, Springer-Verlag, New York, 1993.

[Koh80] W. Kohnen, *Modular forms of half-integral weight on $\Gamma_0(4)$*, Math. Ann. **248** (1980), 249–266.

[Koh82] W. Kohnen, *Newforms of half-integral weight*, J. Reine Angew. Math. **333** (1982), 32–72.

[Koh85] W. Kohnen, *Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight*, Math. Ann. **271** (1985), 237–268.

[KZ81] W. Kohnen, D. Zagier, *Values of L-series of modular forms at center of the critical strip*, Invent. Math. **64** (1981), 175–198.

[Koj99] H. Kojima, *Remark on Fourier coefficients of modular forms of half integral weight belonging to Kohnen's spaces II,* Kodai Math. J. **22** (1999), 99–115.

[LR97] W. Luo, D. Ramakrishnan, *Determination of modular forms by twists of critical L-values*, Invent. Math. **130** (1997), 371–398.

[Miy06] T. Miyake, *Modular forms*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[Niw74] S. Niwa, *Modular forms of half-integral weight and the integral of certain theta-functions*, Nagoya Math. J. **56** (1974), 147–161.

[Sak05] H. Sakata, *On the Kohnen-Zagier formula in the case of level* $4pm$, Math. Z. **250** (2005), 257–266.

[Sak08] H. Sakata, *On the Kohnen-Zagier formula in the case of* '$4\times$*gereral odd*' *level*, Nagoya Math. J. **190** (2008), 63–85.

[SS77] J-P. Serre, H. M. Stark, *Modular forms of weight* 1/2, Lecture Notes in Math., Vol. 627, Springer, Berlin, 27–67, 1977.

[Shim71] G. Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Iwanami Shoten, Publishers, Tokyo; Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971.

[Shim73] G. Shimura, *On modular forms of half integral weight*, Ann. of Math. (2) **97** (1973), 440–481.

[Shin75] T. Shintani, *On construction of holomorphic cusp forms of half integral weight*, Nagoya Math. J. **58** (1975), 83–126.

[Ued88] M. Ueda, *The decomposition of the spaces of cusp forms of half-integral weight and trace formula of Hecke operators*, J. Math. Kyoto. Univ. **28** (1988), 505–555.

[Ued91] M. Ueda, *The trace formulae of twisting operators on the spaces of cusp forms of half-integral weight and some trace relations*, Japan. J. Math. **17** (1991), 83–135.

[Ued93] M. Ueda, *On twisting operators and newforms of half-integral weight*, Nagoya Math. J. **131** (1993), 135–205.

[Ued98] M. Ueda, *On twisting operators and newforms of half-integral weight II*, Nagoya Math. J. **149** (1998), 117–171.

[Wal81] J.-L. Waldspurger, *Sur les coefficients de Fourier des formes modulaires de poids demi-entier*, J. Math. Pures Appl. **60** (1981), 375–484.

[Zag77] D. Zagier, *Modular forms whose Fourier coeffcients involve zeta functions of quadratic fields*, Lecture Notes in Math., Vol. 627, Springer, Berlin, 105–169, 1977.

[伊吹山] 伊吹山知義, 分数ウェイトの保型形式, 第 8 回整数論サマースクール報告集 (2001), 1–22.

[上田] 上田勝, Shimura “On modular forms of half-integral weight” (Ann. of Math. Vol. 97) の解説, 第 8 回整数論サマースクール報告集 (2001), 23–55.

[坂田] 坂田裕, 半整数ウェイトの保型形式のフーリエ級数と保型 L 関数の特殊値の間の関係に関する概説－ W. Kohnen-D. Zagier の与えた結果の紹介, 第 8 回整数論サマースクール報告集 (2001), 157–189.

[成田] 成田宏秋, 一変数のモジュラー形式とそれに付随する保型 L 関数について, 第 9 回整数論サマースクール報告集 (2002), 53–76.

[堀江] 堀江太郎, Modular forms of weight 1/2 (after J-P. Serre and H. M. Stark), 第 8 回整数論サマースクール報告集 (2001), 135–156.