# Kohnen-Zagier 公式の一般化について

小川　紘平

自然科学研究科数理物質科学専攻
博士前期課程 2 年

2019 年 2 月 8 日

# 発表の流れ

1. 保型形式の定義（重さ整数・重さ半整数）
2. 志村対応
3. Kohnen-Zagier 公式について

# イントロダクション(1/3)

## ミレニアム懸賞問題

- リーマン予想
- BSD 予想（バーチ-スウィンナートン=ダイアー予想）
- $P \neq NP$ 問題
- ホッジ予想
- ポアンカレ予想
- ヤン-ミルズ方程式の質量ギャップ問題
- ナビエ-ストークス方程式の解の存在問題

# イントロダクション(1/3)

## ミレニアム懸賞問題

- リーマン予想
- BSD 予想（バーチ-スウィンナートン=ダイアー予想）
- $P \neq NP$ 問題
- ホッジ予想
- ポアンカレ予想
- ヤン-ミルズ方程式の質量ギャップ問題
- ナビエ-ストークス方程式の解の存在問題

# イントロダクション (2/3)

**予想 (BSD 予想)**

$\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 $E$ の $L$ 関数 $L(s;E)$ の $s=1$ での零点の位数は $E$ の Mordell-Weil 群の階数である.

**問題**

保型形式 $f(z)$ に付随する $L$ 関数 $L(s;f)$ の特殊値はどんな値をとるか？

**定理 (志村・谷山予想)**

$\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 $E$ に対し，重さ $2$ の保型形式 $f(z)$ が存在して,

$$L(s;E)=L(s;f)$$

が成り立つ.

$\longrightarrow$ 保型 $L$ 関数の特殊値は重要な研究対象！

# イントロダクション(3/3)

**定理 (J.-L. Waldspurger, 1981, J. Math. Pures Appl.)**

保型 $L$ 関数 $L(s;f)$ の $s=k$ の特殊値は，本質的には志村対応によって $f(z)$ と対応する保型形式 $g(z)$ の Fourier 級数 $c(n)$ の 2 乗である.

$\longrightarrow$ しかし,

- 証明が非常に難解（Metaplectic 群の表現論を用いる）
- $L$ 関数の特殊値と Fourier 級数の間の比例定数が未決定

$\longrightarrow$ この比例定数を特殊な場合（$SL_2(\mathbb{Z})$ の保型形式の場合）に決定したものが Kohnen-Zagier 公式である.

## • 重さ整数の保型形式

以下，$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ を複素上半平面，$k, N$ を整数とする．

$f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$；正則関数

$z \in \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ への $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ の作用を

$$\gamma z = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \gamma\infty = \frac{a}{c}$$

と定める（一次分数変換）．

**定義 ($\Gamma$ に対する重さ整数の保型形式)**

$f(z)$ が $\Gamma$ に対する重さ $k$ の保型形式（resp．cusp 形式）

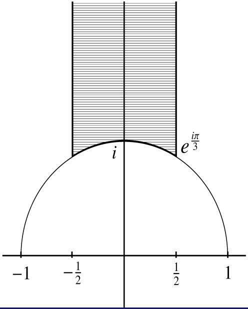
$\overset{\text{def}}{\iff}$
- (保型性)　$f(\gamma z) = (cz+d)^k f(z) \quad (\forall \gamma \in \Gamma)$
- (cusp 条件)　$\infty$ で $f(z)$ は正則（resp．消えている）

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

で $\Gamma$ は生成される.

$\longrightarrow$ (保型性) $\Longleftrightarrow$

- $f(z+1) = f(z)$
- $f\left(-\dfrac{1}{z}\right) = (-z)^k f(z)$




$\Gamma$ の基本領域（左図）

≀|

ポアンカレ円板

≀|

一次元トーラス
（リーマン面）

## 例 (Eisenstein 級数)

$$G_{2k}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}-\{(0,0)\}} \frac{1}{(mz+n)^{2k}}$$

は重さ $2k$ の保型形式である．また，

$$E_{2k}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\zeta(k)} G_{2k}(z)$$

とおく．ここで，$\zeta(s)$ は Riemann のゼータ関数である．

## 例 (Ramanujan の Δ 関数)

$$\Delta(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(2\pi)^{12}}{1728}(E_4(z)^3 - E_6(z)^2) = (2\pi)^{12} \cdot q \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$$

は重さ 12 の cusp 形式である．

**定義 (合同部分群)**

$\Gamma$ の部分群 $\Gamma_0(N)$，$\Gamma_1(N)$，$\Gamma(N)$ を以下のように定義する：

$$
\begin{array}{ccc}
\Gamma_0(N) & \overset{\mathrm{def}}{=} & \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma \,\middle|\, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix} \bmod N \right\} \\
\cup\!\mid & & \\
\Gamma_1(N) & \overset{\mathrm{def}}{=} & \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma \,\middle|\, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bmod N \right\} \\
\cup\!\mid & & \\
\Gamma(N) & \overset{\mathrm{def}}{=} & \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma \,\middle|\, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bmod N \right\}
\end{array}
$$

また，$\Gamma(N)$ を含む $\Gamma$ の部分群を**レベル $N$ の合同部分群**という．

# 1. 保型形式の定義 (5/10)

**定義 (合同部分群に対する重さ整数の保型形式)**

$f(z)$ が合同部分群 $\Gamma'$ に対する重さ $k$ の保型形式（resp. cusp 形式）

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
- (保型性)　$f(\gamma z) = (cz+d)^k f(z) \quad (\forall \gamma \in \Gamma')$
- (cusp 条件)　すべての cusp $s$ で $f(z)$ は正則（resp. 消えている）

$M_k(\Gamma')$ : $\Gamma'$ に関する重さ $k$ の保型形式全体

$S_k(\Gamma')$ : $\Gamma'$ に関する重さ $k$ の cusp 形式全体

以後，$f(z)\Big|[\gamma]_k \overset{\text{def}}{=} (cz+d)^{-k} f(\gamma z)$ とおく．

$\longrightarrow$ 　(保型性)　$f(\gamma z) = (cz+d)^k f(z) \iff f(z)\Big|[\gamma]_k = f(z)$

# 1. 保型形式の定義 (6/10)

## 定義 (指標付き重さ整数の保型形式)

$\mathrm{mod}\ N$ の Dirichlet 指標 $\chi$ に対し,

$$M_k(N,\chi) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{ f \in M_k(\Gamma_1(N)) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_0(N) \text{ に対し,} \\ f(z)\Big|[\gamma]_k = \chi(d) f(z) \text{ を満たす} \end{array} \right\}$$

$$S_k(N,\chi) \stackrel{\mathrm{def}}{=} M_k(N,\chi) \cap S_k(\Gamma_1(N))$$

と定義する.

## 命題

$$M_k(\Gamma_1(N)) = \bigoplus_{\chi} M_k(N,\chi)$$

## • 重さ半整数の保型形式

### 定義 (保型因子)

$\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_0(4)$ と $z \in \mathbb{H}$ に対し，保型因子 $J(\gamma, z)$ を

$$J(\gamma, z) \overset{\text{def}}{=} \varphi_c(d)\varepsilon_d^{-1}\sqrt{cz+d}$$

と定める．ここで，$\varphi_c(d)$ は拡張された Jacobi 記号であり，

$$\varepsilon_d = \begin{cases} 1 & (d \equiv 1 \pmod 4) \\ i & (d \equiv 3 \pmod 4) \end{cases}$$

である．

# 1. 保型形式の定義 (8/10)

### 定義

$\Gamma_0(4)$ の部分群 $\Gamma'$ に対し，

$$\widetilde{\Gamma'} \stackrel{\text{def}}{=} \{(\gamma, J(\gamma, z)) \mid \gamma \in \Gamma'\}$$

### 命題

$\widetilde{\Gamma'}$ と $\Gamma'$ は群として同型である．

関数 $f(z)$ への $\widetilde{\gamma} = (\gamma, J(\gamma, z)) \in \widetilde{\Gamma'}$ の作用を

$$f(z)\Big|[\widetilde{\gamma}]_{\frac{k}{2}} = J(\gamma, z)^{-k} f(\gamma z)$$

と定める．

**定義 (重さ半整数の保型形式)**

$f(z)$ が $\widetilde{\Gamma'}$ に対する重さ $\dfrac{k}{2}$ の保型形式 (resp. cusp 形式)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
- (保型性) $f(z)\Big|[\widetilde{\gamma'}]_{\frac{k}{2}} = f(z) \quad (\forall \widetilde{\gamma'} \in \widetilde{\Gamma'})$
- (cusp 条件) すべての cusp $s$ で $f(z)$ は正則（resp. 消えている）

$M_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma'})$ : 重さ $\dfrac{k}{2}$ の保型形式全体,

$S_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma'})$ : 重さ $\dfrac{k}{2}$ の cusp 形式全体

**例 (Eisenstein 級数)**

$$H_{k+\frac{1}{2}}(z) \overset{\text{def}}{=} \zeta(1-2k)E^{i\infty}_{k+\frac{1}{2}}(z) + 2^{-2k-1}(1-(-1)^k i)E^{0}_{k+\frac{1}{2}}(z)$$

は重さ $k+\frac{1}{2}$ の保型形式である．ここで，

$$\begin{aligned} E^{i\infty}_{k+\frac{1}{2}}(z) &= \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(4)} J(\gamma,z)^{-2k-1} \\ E^{0}_{k+\frac{1}{2}}(z) &= (-1)^k i z^{-k-\frac{1}{2}} E^{i\infty}_{k+\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{4z}\right) \end{aligned}$$

**例**

$$\delta(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{60}{2\pi i}(2G_4(4z)\Theta'(z) - G'_4(4z)\Theta(z))$$

は重さ $\dfrac{13}{2}$ の cusp 形式である．ここで $\Theta(z)$ はテータ関数である．

# 2. 志村対応 (1/4)

## 定義 (重さ整数の場合の Hecke 作用素)

$n$ を自然数とする． $\Gamma'$ に対する重さ $k$ の保型形式 $f(z)$ に対し，

Hecke 作用素 $T_n$ を

$$T_n f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\alpha} f \Big| [\Gamma' \alpha \Gamma']_k$$

と定める．

## 定義 (重さ半整数の場合の Hecke 作用素)

$n$ を $N$ と互いに素な自然数とする． $f(z) \in M_{\frac{k}{2}}(\widetilde{\Gamma_1(N)})$ に対し，

Hecke 作用素 $\widetilde{T}_{n^2}$ を

$$\widetilde{T}_{n^2} f \stackrel{\text{def}}{=} f \Big| [\widetilde{\Gamma_1(N)} \xi_n \widetilde{\Gamma_1(N)}]_{\frac{k}{2}}$$

と定める．

**定義 (Hecke 固有形式)**

- 重さ整数の保型形式 $f(z)$ が $T_n$ に対する Hecke 固有形式
  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $f(z)$ が $T_n$ に対する固有ベクトル
- 重さ半整数の保型形式 $f(z)$ が $\widetilde{T}_{n^2}$ に対する Hecke 固有形式
  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $f(z)$ が $\widetilde{T}_{n^2}$ に対する固有ベクトル
- 保型形式 $f(z)$ が Hecke 同時固有形式
  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $f(z)$ がいくつかの Hecke 作用素に対する固有ベクトル

# 2. 志村対応 (3/4)

**定理 (G. Shimura, 1973, Ann. of Math. (2))**

$k$ : 自然数, $t$ : 平方因子を持たない自然数, $N$ : 4 の倍数

$\chi$ : $\mathrm{mod}\ N$ の偶の Dirichlet 指標

$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n \in S_{k+\frac{1}{2}}(N, \chi)$ : ${}^\forall T_p$ に対する Hecke 同時固有形式

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_t(n)n^{-s} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \chi(m)\left(\frac{(-1)^k t}{m}\right) m^{k-1-s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} a(tn^2)n^{-s}\right)$$

$$F_t(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} A_t(n)q^n$$

$\Longrightarrow F_t \in M_{2k}(N_t, \chi^2)$.

特に $k \geq 2$ であれば, $F_t \in S_{2k}(N_t, \chi^2)$.

# 2. 志村対応 (4/4)

**例**

重さ $\dfrac{13}{2}$ の cusp 形式

$$\delta(z) = \frac{60}{2\pi i}(2G_4(4z)\Theta'(z) - G_4'(4z)\Theta(z))$$

は志村対応によって重さ 12 の cusp 形式 $\Delta(z)$ と対応する.

**例**

重さ $k + \frac{1}{2}$ の保型形式 $H_{k+\frac{1}{2}}(z)$ は志村対応によって重さ $2k$ の保型形式

$$\frac{1}{2}L\left(1-k, D\right)\zeta(1-2k)E_{2k}(z)$$

と対応する.

# 3. Kohnen-Zagier 公式について (1/4)

**定義 (Kohnen plus 空間)**

$$M^{+}_{k+\frac{1}{2}}(N) \overset{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n \in M_{k+\frac{1}{2}}(\widetilde{\Gamma_0(4N)}) \;\middle|\; \begin{array}{l} (-1)^k n \equiv 2,3 \bmod 4 \\ \text{の時}, a(n)=0 \end{array} \right\}$$

$$S^{+}_{k+\frac{1}{2}}(N) \overset{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n \in S_{k+\frac{1}{2}}(\widetilde{\Gamma_0(4N)}) \;\middle|\; \begin{array}{l} (-1)^k n \equiv 2,3 \bmod 4 \\ \text{の時}, a(n)=0 \end{array} \right\}$$

**命題 (W. Kohnen, 1980, Math. Ann.)**

志村対応の $M^{+}_{k+\frac{1}{2}}(4)$, $S^{+}_{k+\frac{1}{2}}(4)$ への制限は，それぞれ $M_{2k}(\Gamma)$, $S_{2k}(\Gamma)$ への同型写像である.

# 3. Kohnen-Zagier 公式について (2/4)

次の式が Kohnen-Zagier 公式と呼ばれているものである.

**定理 (W. Kohnen, D. Zagier, 1981, Invent. Math.)**

$f(z) \in S_{2k}(\Gamma)$ : 正規化された Hecke 同時固有形式

$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n) q^n \in S^+_{k+\frac{1}{2}}(4)$ : $f(z)$ の志村対応

$D : (-1)^k D > 0$ を満たす基本判別式

この時,

$$\frac{c(|D|)^2}{\langle g, g\rangle} = \frac{(k-1)!}{\pi^k} |D|^{k-\frac{1}{2}} \frac{L(f, D, k)}{\langle f, f\rangle}$$

が成り立つ. ここで, $\langle\, ,\, \rangle$ は Petersson 内積である.

- Kohnen-Zagier 公式の証明に関わる $S^+_{k+\frac{1}{2}}(4)$ の特殊事情

$\longrightarrow S^+_{k+\frac{1}{2}}(4)$ は「重複度 1」を満たす.

# 3. Kohnen-Zagier 公式について (3/4)

**性質（重複度 1）**

Hecke 同時固有形式 $f(z),\ g(z)$ の $T_p$ に対する固有値がすべて等しい

$\Longrightarrow$ $f(z)$ と $g(z)$ は定数倍の差しかない.

「重複度 1」を満たす

$\longrightarrow$ Hecke 同時固有形式からなる直交基底が得られる.

しかし、一般レベルの重さ半整数の保型形式の空間 $S_{k+\frac{1}{2}}(N)$ の「重複度は 2 以上」である.

$\longrightarrow$ 「よい」部分空間を考える必要がある.

# 3. Kohnen-Zagier 公式について (4/4)

修士論文では次の定理の証明を紹介した.

## 定理 (H. Sakata, 2008, Nagoya Math. J.)

$N = 4 \times (\text{奇数})$, $M = \dfrac{N}{4}$

$f(z) \in S_{2k}^{\mathrm{new}}(N)$ : 原始的な cusp 形式で,「ある」固有値を持つ

$g(z) \in \mathfrak{N}_{k+\frac{1}{2}}^{+}(N)$ : $f(z)$ の $D$-志村対応

$$g(z) = \sum_{\substack{\kappa \in \mathrm{Map}(\Pi(N), \{\pm 1\}) \\ \kappa \text{は } (\tau_{\mathrm{odd}}) \text{ を満たす}}} g_\kappa(z) \qquad (g_\kappa \in \mathfrak{N}_{k+\frac{1}{2}}^{+,\kappa}(N))$$

と直交成分に分解し, $g_\kappa(z)$ の Fourier 係数を $c_{g_\kappa}(n)$ とする. この時,

$$\sum_{\substack{\kappa \in \mathrm{Map}(\Pi(N), \{\pm 1\}) \\ \kappa \text{は } (\tau_{\mathrm{odd}}) \text{ を満たす}}} \frac{|c_{g_\kappa}(|D|)|^2}{\langle g_\kappa, g_\kappa \rangle} = 2^{\nu(M)} \frac{(k-1)!}{\pi^k} |D|^{k-\frac{1}{2}} \frac{L(f, D, k)}{\langle f, f \rangle}.$$

## 今後の課題

- $N = 8 \times (\text{奇数}), 16 \times (\text{奇数}), \ldots$ の場合の重さ半整数の Newform がなす空間の一般論の構築
- $N = 8 \times (\text{奇数}), 16 \times (\text{奇数}), \ldots$ の場合の Kohnen-Zagier 公式