岩澤理論における岩澤類数公式と岩澤不変量のPARI/GPによる計算について

高橋和暉

新潟大学大学院自然科学研究科
数理物質科学専攻博士前期課程 2 年

2024 年 2 月 9 日

修士論文の内容

修士論文の内容

- 第 1 章：p 進整数
  （p 進整数）
- 第 2 章：$\mathbb{Z}_p$ 拡大
  （円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大）
- 第 3 章：岩澤代数
  （有限生成 Λ 加群の構造定理，岩澤代数）
- 第 4 章：岩澤類数公式
  （岩澤加群，岩澤類数公式，PARI/GP による計算例）
- 第 5 章：非アーベル岩澤理論
  （非アーベル岩澤公式）

発表の流れ

1. イントロダクション
   - p 進整数
   - $\mathbb{Z}_p$ 拡大
   - 類数
2. 岩澤類数公式
   - 岩澤代数
   - 有限生成 Λ 加群の構造定理
   - 岩澤加群
   - 岩澤類数公式
   - 岩澤多項式
3. PARI/GP を用いた計算例
   - 水澤靖氏による Iwapoly.gp
   - 計算例 1
   - 計算例 2

p 進整数

p を素数とする.

p 進整数

p を素数とする．

$0 \leq n \leq m$ に対し，自然な準同型

$$\varphi_{n,m} : \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

が定まり，$(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \varphi_{n,m})$ は逆系をなす．

p 進整数

p を素数とする．

$0 \leq n \leq m$ に対し，自然な準同型

$$\varphi_{n,m} : \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

が定まり，$(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \varphi_{n,m})$ は逆系をなす．

逆極限 $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ を p 進整数環という．

p 進整数

$(a_k)_{k \geq 0}$ を整数の列とする.

p 進整数

$(a_k)_{k\geq 0}$ を整数の列とする．各 $n \geq 0$ に対し，

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} a_k p^k \bmod p^{n+1}$$

とすれば $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{Z}_p$ となる．

p 進整数

$(a_k)_{k\geq 0}$ を整数の列とする．各 $n \geq 0$ に対し，

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} a_k p^k \bmod p^{n+1}$$

とすれば $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{Z}_p$ となる．このとき

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k$$

とかくことにする．

p 進整数

定義

p 進整数 $x \in \mathbb{Z}_p$ に対し，整数の列 $(a_k)_{k \geq 0}$ $(0 \leq a_k \leq p-1)$ が一意的に存在し

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k$$

とかける．

p 進整数

定義

p 進整数 $x \in \mathbb{Z}_p$ に対し，整数の列 $(a_k)_{k \geq 0}$ $(0 \leq a_k \leq p-1)$ が一意的に存在し

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k$$

とかける．これを x の p 進展開という．

p 進整数

定義

p 進整数 $x \in \mathbb{Z}_p$ に対し，整数の列 $(a_k)_{k \geq 0}$ $(0 \leq a_k \leq p-1)$ が一意的に存在し

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k$$

とかける．これを x の p 進展開という．

p 進整数は形式的な冪級数とみなせる．

$\mathbb{Z}_p$ 拡大

$\mathrm{Gal}(K/k) \simeq \mathbb{Z}_p$ であるとき，K/k を $\mathbb{Z}_p$ 拡大という．

$\mathbb{Z}_p$ 拡大

$\mathrm{Gal}(K/k) \simeq \mathbb{Z}_p$ であるとき，K/k を $\mathbb{Z}_p$ 拡大という.

基本的な $\mathbb{Z}_p$ 拡大として，円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大がある.

$\mathbb{Z}_p$ 拡大

$\mathrm{Gal}(K/k) \simeq \mathbb{Z}_p$ であるとき，K/k を $\mathbb{Z}_p$ 拡大という．

基本的な $\mathbb{Z}_p$ 拡大として，円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大がある．

$\mathbb{Z}_p$ 拡大 K/k に対して，中間体は

$$k = k_0 \subset k_1 \subset k_2 \subset \cdots \subset k_n \subset \cdots \subset K$$

となる（k_n は k 上 p^n 次の中間体）．

類数

k を有限次代数体，$\mathcal{O}_k = k \cap \overline{\mathbb{Z}}$ を k の整数環とする．

類数

k を有限次代数体，$\mathcal{O}_k = k \cap \overline{\mathbb{Z}}$ を k の整数環とする．

$I_k : \mathcal{O}_k$ の分数イデアル全体のなすアーベル群

類数

k を有限次代数体，$\mathcal{O}_k = k \cap \overline{\mathbb{Z}}$ を k の整数環とする．

I_k : $\mathcal{O}_k$ の分数イデアル全体のなすアーベル群
P_k : $\mathcal{O}_k$ の単項分数イデアル全体のなす I_k の部分群

類数

k を有限次代数体，$\mathcal{O}_k = k \cap \overline{\mathbb{Z}}$ を k の整数環とする．

I_k : $\mathcal{O}_k$ の分数イデアル全体のなすアーベル群
P_k : $\mathcal{O}_k$ の単項分数イデアル全体のなす I_k の部分群

$H_k = I_k/P_k$ を k のイデアル類群といい，
$h_k = \#H_k$ を k の類数という．

類数

完全系列

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}_k^\times \longrightarrow k^\times \longrightarrow I_k \longrightarrow H_k \longrightarrow 1$$

から，単数群 $\mathcal{O}_k^\times$ とイデアル類群 H_k は数とイデアルのずれを表しており，数論における重要な対象となっている．

類数

完全系列

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}_k^\times \longrightarrow k^\times \longrightarrow I_k \longrightarrow H_k \longrightarrow 1$$

から，単数群 $\mathcal{O}_k^\times$ とイデアル類群 H_k は数とイデアルのずれを表しており，数論における重要な対象となっている．

岩澤類数公式は，$\mathbb{Z}_p$ 拡大の中間体の類数の挙動を記述している．

岩澤代数

以下では主に [伊藤], [藤井], [福田 1] を参考にしている．

岩澤代数

以下では主に [伊藤], [藤井], [福田 1] を参考にしている.

定義

$\varGamma$ を $\mathbb{Z}_p$ と位相同型な乗法群, $\varGamma_n = \varGamma/\varGamma^{p^n}$ とおく. このとき,

$$\mathbb{Z}_p[[\varGamma]] = \varprojlim \mathbb{Z}_p[\varGamma_n]$$

を岩澤代数という.

岩澤代数

γ を Γ の位相的生成元，すなわち $\langle\gamma\rangle \subset \Gamma$ が稠密となる元とする．

岩澤代数

γ を Γ の位相的生成元，すなわち $\langle\gamma\rangle \subset \Gamma$ が稠密となる元とする．

定理 (Serre [Ser] 1995)

対応 $\gamma \leftrightarrow 1 + T$ によって

$$\mathbb{Z}_p[[\Gamma]] \simeq \mathbb{Z}_p[[T]]$$

である．

有限生成 Λ 加群の構造定理

$\Lambda = \mathbb{Z}_p[[T]]$ とおく.

有限生成 Λ 加群の構造定理

$\Lambda = \mathbb{Z}_p[[T]]$ とおく．

定義 (擬同型)

M, M' を有限生成 Λ 加群とする．このとき Λ 準同型 $\varphi\colon M \to M'$ が擬同型であるとは，$\mathrm{Ker}\ \varphi$ と $\mathrm{Coker}\ \varphi$ が有限であるときをいう．

有限生成 Λ 加群の構造定理

$\Lambda = \mathbb{Z}_p[[T]]$ とおく．

定義 (擬同型)

M, M' を有限生成 Λ 加群とする．このとき Λ 準同型 $\varphi\colon M \to M'$ が擬同型であるとは，$\mathrm{Ker}\,\varphi$ と $\mathrm{Coker}\,\varphi$ が有限であるときをいう．

定義 (distinguished 多項式)

$P(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}_p[T]$ とする．$p \mid a_i$ $(0 \leq i \leq n-1)$ が成り立つとき，$P(T)$ を distinguished 多項式という．

有限生成 Λ 加群の構造定理

定理 (有限生成 Λ 加群の構造定理)

M を有限生成 Λ 加群とする．このとき擬同型

$$M \longrightarrow \Lambda^{\oplus r} \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{s} \Lambda/(p^{n_i})\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{t} \Lambda/(f_j(T)^{m_j})\right)$$

が存在する．ただし r, s, t, n_i, m_j は非負整数，$f_j(T)$ は既約かつ distinguished な多項式である．また，右辺は順序を除いて一意的に定まる．

岩澤加群

k を有限次代数体，k_∞/k を $\mathbb{Z}_p$ 拡大とする．k_n を k 上 p^n 次の中間体とし，A_n を k_n のイデアル類群の p 部分とする．

岩澤加群

k を有限次代数体，k_∞/k を $\mathbb{Z}_p$ 拡大とする．k_n を k 上 p^n 次の中間体とし，A_n を k_n のイデアル類群の p 部分とする．

命題

k_∞/k で分岐する素点が存在する．さらに非負整数 e が存在し，k_∞/k_e で分岐する任意の素点は完全分岐する．

岩澤加群

k を有限次代数体，k_∞/k を $\mathbb{Z}_p$ 拡大とする．k_n を k 上 p^n 次の中間体とし，A_n を k_n のイデアル類群の p 部分とする．

命題

k_∞/k で分岐する素点が存在する．さらに非負整数 e が存在し，k_∞/k_e で分岐する任意の素点は完全分岐する．

仮定

k_∞/k で分岐する任意の素点は完全分岐する．

岩澤加群

定義

逆系 $(A_n, N_{m,n})$ の逆極限

$$X_{k_\infty} = \varprojlim A_n$$

を k_∞/k の岩澤加群という.

岩澤加群

定義

逆系 $(A_n, N_{m,n})$ の逆極限

$$X_{k_\infty} = \varprojlim A_n$$

を k_∞/k の岩澤加群という.

X を k_∞ の最大不分岐アーベル p 拡大のガロア群とする.

岩澤加群

定義

逆系 $(A_n, N_{m,n})$ の逆極限

$$X_{k_\infty} = \varprojlim A_n$$

を k_∞/k の岩澤加群という.

X を k_∞ の最大不分岐アーベル p 拡大のガロア群とする．このとき，$\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ 加群として

$$X_{k_\infty} \simeq X$$

である.

岩澤類数公式

岩澤加群 X_{k_∞} へは岩澤代数 $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ が自然に作用している.

岩澤類数公式

岩澤加群 X_{k_∞} へは岩澤代数 $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ が自然に作用している．

これを，X への Λ の作用としてとらえて，その様子を調べることで次の定理が得られる．

岩澤類数公式

定理 (岩澤類数公式，岩澤 [Iwa1] 1959)

A_n を k_n のイデアル類群の Sylow p 部分群とする．このとき k_∞/k のみに依存する非負整数 $\lambda = \lambda(k_\infty/k)$, $\mu = \mu(k_\infty/k)$, n_0 と整数 $\nu = \nu(k_\infty/k)$ が存在し， $n \geq n_0$ に対して

$$\#A_n = p^{\lambda n + \mu p^n + \nu}$$

が成り立つ．

岩澤類数公式

定理 (岩澤類数公式，岩澤 [Iwa1] 1959)

A_n を k_n のイデアル類群の Sylow p 部分群とする．このとき k_∞/k のみに依存する非負整数 $\lambda = \lambda(k_\infty/k)$, $\mu = \mu(k_\infty/k)$, n_0 と整数 $\nu = \nu(k_\infty/k)$ が存在し，$n \geq n_0$ に対して

$$\#A_n = p^{\lambda n + \mu p^n + \nu}$$

が成り立つ．

定理の $\lambda(k_\infty/k)$, $\mu(k_\infty/k)$, $\nu(k_\infty/k)$ を岩澤不変量といい，特に k_∞/k が円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大のとき $\lambda_p(k)$, $\mu_p(k)$, $\nu_p(k)$ とかく．

岩澤類数公式

定理 (岩澤類数公式，岩澤 [Iwa1] 1959)

A_n を k_n のイデアル類群の Sylow p 部分群とする．このとき k_∞/k のみに依存する非負整数 $\lambda = \lambda(k_\infty/k)$, $\mu = \mu(k_\infty/k)$, n_0 と整数 $\nu = \nu(k_\infty/k)$ が存在し， $n \geq n_0$ に対して

$$\# A_n = p^{\lambda n + \mu p^n + \nu}$$

が成り立つ．

定理の $\lambda(k_\infty/k)$, $\mu(k_\infty/k)$, $\nu(k_\infty/k)$ を岩澤不変量といい，特に k_∞/k が円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大のとき $\lambda_p(k)$, $\mu_p(k)$, $\nu_p(k)$ とかく．

岩澤多項式

定義

X は有限生成ねじれ Λ 加群であり，擬同型

$$X \longrightarrow \left(\bigoplus_{i=1}^{s} \Lambda/(p^{n_i})\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{t} \Lambda/(f_j(T)^{m_j})\right)$$

が存在する．

岩澤多項式

定義

X は有限生成ねじれ Λ 加群であり，擬同型

$$X \longrightarrow \Big(\bigoplus_{i=1}^{s} \Lambda/(p^{n_i})\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{j=1}^{t} \Lambda/(f_j(T)^{m_j})\Big)$$

が存在する．$P(T) = \prod_{i=1}^{s} p^{n_i} \prod_{j=1}^{t} f_j(T)^{m_j}$ を
k_∞/k の岩澤多項式という．

岩澤多項式

定義

X は有限生成ねじれ Λ 加群であり，擬同型

$$X \longrightarrow \left(\bigoplus_{i=1}^{s} \Lambda/(p^{n_i})\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{t} \Lambda/(f_j(T)^{m_j})\right)$$

が存在する． $P(T) = \prod_{i=1}^{s} p^{n_i} \prod_{j=1}^{t} f_j(T)^{m_j}$ を

k_∞/k の岩澤多項式という．

実は $\lambda = \sum_{j=1}^{t} m_j \deg f_j(T) = \deg P(T)$, $\mu = \sum_{i=1}^{s} n_i$ となっている．

水澤靖氏による Iwapoly.gp

水澤靖氏（立教大学）によって作成された，PARI/GP [PARI1] のプログラムである Iwapoly.gp [水澤] を用いた計算例を紹介する．

水澤靖氏による Iwapoly.gp

水澤靖氏（立教大学）によって作成された，PARI/GP [PARI1] のプログラムである Iwapoly.gp [水澤] を用いた計算例を紹介する．

Iwapoly.gp は水澤靖氏の researchmap における資料公開 `https://researchmap.jp/read0206718/published_works` 上に公開されている．

水澤靖氏による Iwapoly.gp

Iwapoly.gp の使い方

水澤靖氏による Iwapoly.gp

Iwapoly.gp の使い方

- `Iwapoly(`p`,`m`,`n`,2)` は $\lambda < p^n$ となる n に対して, $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ の円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大 k_∞/k の λ 不変量 $\lambda = \lambda_p(k)$ を返す.

水澤靖氏による Iwapoly.gp

Iwapoly.gp の使い方

- `Iwapoly(`p`,`m`,`n`,2)` は $\lambda < p^n$ となる n に対して，$k = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ の円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大 k_∞/k の λ 不変量 $\lambda = \lambda_p(k)$ を返す.
- `Iwapoly(`p`,`m`,`n`,1)` は $\lambda < p^n$ となる n に対して，k_∞/k の岩澤多項式 $P(x)$ の近似を返す.

水澤靖氏による Iwapoly.gp

Iwapoly.gp の使い方

- `Iwapoly(`p`,`m`,`n`,2)` は $\lambda < p^n$ となる n に対して，$k = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ の円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大 k_∞/k の λ 不変量 $\lambda = \lambda_p(k)$ を返す．
- `Iwapoly(`p`,`m`,`n`,1)` は $\lambda < p^n$ となる n に対して，k_∞/k の岩澤多項式 $P(x)$ の近似を返す．

より詳しいことは Mizusawa [Miz1] を見てほしい．

水澤靖氏による Iwapoly.gp

```
gp > Iwapoly(3,23834,3,2)
```

水澤靖氏による Iwapoly.gp

```
gp > Iwapoly(3,23834,3,2)

10
```

水澤靖氏による Iwapoly.gp

```
gp > Iwapoly(3,23834,3,2)

10
```

$\cdots \quad \lambda_3(\mathbb{Q}(\sqrt{-23834})) = 10$ であることがわかる.

水澤靖氏による Iwapoly.gp

```
gp > Iwapoly(3,23834,3,2)
10
```

$\cdots$ $\lambda_3(\mathbb{Q}(\sqrt{-23834})) = 10$ であることがわかる.

```
gp > Iwapoly(3,23834,3,1)
```

水澤靖氏による Iwapoly.gp

```
gp > Iwapoly(3,23834,3,2)
10
```

$\cdots \quad \lambda_3(\mathbb{Q}(\sqrt{-23834})) = 10$ であることがわかる.

```
gp > Iwapoly(3,23834,3,1)
[x^10, 1]
```

水澤靖氏による Iwapoly.gp

```
gp > Iwapoly(3,23834,3,2)
10
```

$\cdots\quad \lambda_3(\mathbb{Q}(\sqrt{-23834})) = 10$ であることがわかる.

```
gp > Iwapoly(3,23834,3,1)
[x^10, 1]
```

$\cdots\quad P(x) \equiv x^{10} \pmod{3^1}$ であることがわかる.

計算例 1

水澤靖氏が作成した Iwapoly.gp を用いて，$1 \leq m \leq 10^6$ の範囲で $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ の円分 $\mathbb{Z}_3$ 拡大の λ 不変量 $\lambda = \lambda_3(k)$ が 10 以上となる m をまとめたものが次の表である.

計算例 1

Table: $\lambda_3(k) \geq 10$ となる $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ $(1 \leq m \leq 10^6)$

$\lambda_3(k)$	$m : k = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$
10	$23834 = 2 \cdot 17 \cdot 701$, $155677 = 41 \cdot 3797$, $192257 = 13 \cdot 23 \cdot 643$, $200651 = 11 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 37$, $315503 = 17 \cdot 67 \cdot 277$, $346847 = 151 \cdot 2297$, $352718 = 2 \cdot 31 \cdot 5689$, $373990 = 2 \cdot 5 \cdot 149 \cdot 251$, $431803 = 431803$, $441299 = 37 \cdot 11927$, $484397 = 484397$, $614217 = 3 \cdot 53 \cdot 3863$, $629105 = 5 \cdot 125821$, $646546 = 2 \cdot 323273$, $667001 = 73 \cdot 9137$, $704474 = 2 \cdot 352237$, $835310 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11933$, $839737 = 617 \cdot 1361$, $892631 = 709 \cdot 1259$

計算例 1

Table: $\lambda_3(k) \geq 10$ となる $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ $(1 \leq m \leq 10^6)$

$\lambda_3(k)$	$m : k = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$
11	$53301 = 3 \cdot 109 \cdot 163$, $287423 = 197 \cdot 1459$, $550538 = 2 \cdot 275269$, $580037 = 23 \cdot 25219$, $818615 = 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 1231$, $896771 = 896771$
12	$721981 = 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 79$
13	
14	$956238 = 2 \cdot 3 \cdot 197 \cdot 809$

計算例 1

Table: $\lambda_3(k) \geq 10$ となる $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ $(1 \leq m \leq 10^6)$

$\lambda_3(k)$	$m : k = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$
11	$53301 = 3 \cdot 109 \cdot 163$, $287423 = 197 \cdot 1459$, $550538 = 2 \cdot 275269$, $580037 = 23 \cdot 25219$, $818615 = 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 1231$, $896771 = 896771$
12	$721981 = 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 79$
13	
14	$956238 = 2 \cdot 3 \cdot 197 \cdot 809$

$\lambda = 8$ となる m は 142 個，$\lambda = 9$ となる m は 45 個，$\lambda = 10$ となる m は 19 個，$\lambda = 11$ となる m は 6 個，$\lambda = 12$ となる m は 1 個，$\lambda = 13$ となる m は 0 個，$\lambda = 14$ となる m は 1 個であった．

計算例1

Table: $\lambda_3(k) \geq 10$ となる $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ $(1 \leq m \leq 10^6)$

$\lambda_3(k)$	$m : k = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$
11	$53301 = 3 \cdot 109 \cdot 163$, $287423 = 197 \cdot 1459$, $550538 = 2 \cdot 275269$, $580037 = 23 \cdot 25219$, $818615 = 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 1231$, $896771 = 896771$
12	$721981 = 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 79$
13	
14	$956238 = 2 \cdot 3 \cdot 197 \cdot 809$

$\lambda = 8$ となる m は142個，$\lambda = 9$ となる m は45個，$\lambda = 10$ となる m は19個，$\lambda = 11$ となる m は6個，$\lambda = 12$ となる m は1個，$\lambda = 13$ となる m は0個，$\lambda = 14$ となる m は1個であった．

計算例1

Table: $\lambda_3(k) \geq 10$ となる $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ $(1 \leq m \leq 10^6)$

$\lambda_3(k)$	$m : k = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$
11	$53301 = 3 \cdot 109 \cdot 163$, $287423 = 197 \cdot 1459$, $550538 = 2 \cdot 275269$, $580037 = 23 \cdot 25219$, $818615 = 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 1231$, $896771 = 896771$
12	$721981 = 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 79$
13	
14	$956238 = 2 \cdot 3 \cdot 197 \cdot 809$

$\lambda = 8$ となる m は 142 個，$\lambda = 9$ となる m は 45 個，$\lambda = 10$ となる m は 19 個，$\lambda = 11$ となる m は 6 個，$\lambda = 12$ となる m は 1 個，$\lambda = 13$ となる m は 0 個，$\lambda = 14$ となる m は 1 個であった．

表の中で $\lambda = \lambda_3(k)$ の値が 12 と 14 の m に対し，岩澤多項式 $P(x)$ の近似を与える．

計算例 2

- $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-721981})$ の円分 $\mathbb{Z}_3$ 拡大に対して $\lambda = \lambda_3(k) = 12$ であり，岩澤多項式 $P(x)$ について

計算例 2

- $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-721981})$ の円分 $\mathbb{Z}_3$ 拡大に対して $\lambda = \lambda_3(k) = 12$ であり，岩澤多項式 $P(x)$ について

$$
\begin{aligned}
P(x) \equiv x^{12} &+ 27x^{11} + 75x^{10} + 30x^{9} + 51x^{8} + 3x^{7} \\
&+ 3x^{6} + 54x^{5} + 75x^{4} + 57x^{3} + 60x^{2} \\
&+ 3x + 57 \pmod{3^4}.
\end{aligned}
$$

計算例2

- $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-721981})$ の円分 $\mathbb{Z}_3$ 拡大に対して $\lambda = \lambda_3(k) = 12$ であり，岩澤多項式 $P(x)$ について

$$
\begin{aligned}
P(x) \equiv x^{12} &+ 27x^{11} + 75x^{10} + 30x^9 + 51x^8 + 3x^7 \\
&+ 3x^6 + 54x^5 + 75x^4 + 57x^3 + 60x^2 \\
&+ 3x + 57 \pmod{3^4}.
\end{aligned}
$$

- $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-956238})$ の円分 $\mathbb{Z}_3$ 拡大に対して $\lambda = \lambda_3(k) = 14$ であり，岩澤多項式 $P(x)$ について

計算例 2

- $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-721981})$ の円分 $\mathbb{Z}_3$ 拡大に対して $\lambda = \lambda_3(k) = 12$ であり，岩澤多項式 $P(x)$ について

$$\begin{aligned} P(x) \equiv x^{12} &+ 27x^{11} + 75x^{10} + 30x^9 + 51x^8 + 3x^7 \\ &+ 3x^6 + 54x^5 + 75x^4 + 57x^3 + 60x^2 \\ &+ 3x + 57 \pmod{3^4}. \end{aligned}$$

- $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-956238})$ の円分 $\mathbb{Z}_3$ 拡大に対して $\lambda = \lambda_3(k) = 14$ であり，岩澤多項式 $P(x)$ について

$$\begin{aligned} P(x) \equiv x^{14} &+ 63x^{13} + 51x^{12} + 72x^{11} + 24x^{10} + 39x^9 \\ &+ 69x^8 + 75x^7 + 75x^6 + 39x^5 + 30x^4 \\ &+ 30x^3 + 69x^2 + 24x + 75 \pmod{3^4}. \end{aligned}$$

今後について

今回の計算では叶わなかったが，$\lambda_3(k) \geq 15$ となる λ 不変量を見つけ出し，また，どのような条件で λ 不変量が大きくなるのかなどについて考察したい．

今後について

今回の計算では叶わなかったが，$\lambda_3(k) \geq 15$ となる λ 不変量を見つけ出し，また，どのような条件で λ 不変量が大きくなるのかなどについて考察したい．
さらに，水澤靖氏が作成した Iwapoly.gp では 3 以外の素数 p に対しても計算ができるので，より広範囲な計算を試してみたい．

今後について

今回の計算では叶わなかったが，$\lambda_3(k) \geq 15$ となる λ 不変量を見つけ出し，また，どのような条件で λ 不変量が大きくなるのかなどについて考察したい．
さらに，水澤靖氏が作成した Iwapoly.gp では 3 以外の素数 p に対しても計算ができるので，より広範囲な計算を試してみたい．
また，5 章では尾崎学氏による非アーベル岩澤公式などを紹介しているが，深くまで立ち入れてはいない．興味を持った Mizausawa [Miz4] を読み進めるなどしてより深く理解するとともに，自分なりに考察し具体例をつくったりしていきたい．

参考文献

[伊藤] 伊藤 剛司，有限生成 Λ 加群の構造定理，
2003 年度整数論サマースクール「岩澤理論」報告集，5–26.

[福田 1] 福田 隆，岩澤による p-進 L-函数の構成の応用 (I) 岩澤不変量の決定，
2003 年度整数論サマースクール「岩澤理論」報告集，123–129.

[藤井] 藤井 俊，岩澤類数公式，
2003 年度整数論サマースクール「岩澤理論」報告集，27–52.

[水澤] 水澤 靖，Iwapoly.gp （PARI/GP のプログラム），
`https://researchmap.jp/read0206718/published_works`.

[Iwa1] K. Iwasawa, *On Γ-extensions of algebraic number fields*, Bull. Amer. Math. Soc. **65** (1959), 183–226.

参考文献

[Miz1] Y. Mizusawa, *Notes on computing Iwasawa polynomials by PARI/GP*, https://researchmap.jp/read0206718/published_works.

[Miz4] Y. Mizusawa, *On metabelian 2-class field towers over $\mathbb{Z}_2$-extensions of real quadratic fields*, Canad. Math. Bull. **65** (2022), 795–805.

[PARI1] The PARI Group, PARI/GP version 2.13.2, Univ. Bordeaux, 2021, http://pari.math.u-bordeaux.fr/.

[Ser] J-P. Serre, *Classes des corps cyclotomiques (d'après K. Iwasawa)*, Séminaire Bourbaki, Vol. 5, Exp. No. 174, 83–93, Société Mathématique de France, Paris, 1995.