数値解析：第 10 回レポート課題

担当教員：劉雪峰

1　常微分方程式の初期値問題

以下の初期値問題の厳密解は $Y(t) = (2t+1)/(t^2+1)$ である。

$$Y' = \frac{2-2tY}{t^2+1}, \quad 0 \le t \le 1, \quad Y(0) = 1\,.$$

- 以下の近似計算方法で $Y(1)$, $Y(0.5)$ の近似値を求めて、それぞれの方法の収束オーダーを検証しなさい。
  - Euler 法
  - Heum 法
  - 4 次精度の Runge-Kutta 法
- 時間の分割は $h = 0.1, 0.05, 0.025$ とすること。

2　（オプション）Heum 方法の局所打ち切り誤差

以下の初期値問題について、Heum 方法の局所打ち切り誤差が $\tau_i(h) = O(h^2)$ であることを証明しなさい。

$$\begin{cases} Y^{(1)}(t) = f(t, Y(t)) & t \in [a,b], \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

【ヒント】t と Y が独立な変数であるとき、$f(t,Y)$ の (t_i, Y_i) における Taylor 展開式は以下のことである。

$$f(t,Y) = f(t_i,Y_i) + (t-t_i)\frac{\partial f(t_i,Y_i)}{\partial t} + (Y-Y_i)\frac{\partial f(t_i,Y_i)}{\partial Y} + C(t,Y)h^2\,.$$

ただし、$C(t,Y)$ は f の 2 階微分に依存し、h によらない量である。