

数値解析：第2回レポート課題

担当教員：劉雪峰

2014年10月20日

1 不動点小数の演算

前回レポートで作った6-bitの小数によって、 $x^2 - 3x + 0.1875 = 0$ の根を以下の2つの式で計算し、計算結果の精度を比較しなさい。(丸めモードは「最近点へ丸める」とする。)

$$\text{a) } x_1 = (3 + \sqrt{3 * 3 - 4 * 0.1875}) / 2, \quad x_2 = (3 - \sqrt{3 * 3 - 4 * 0.1875}) / 2.$$

$$\text{b) } x_1 = (3 + \sqrt{3 * 3 - 4 * 0.1875}) / 2, \quad x_2 = 0.1875 / x_1.$$

[ヒント] LaTeX の Table の使い方を説明するために、解答の一部を説明する。 $b = -3, c = 0.1875$ とする。まず、 x_1 を計算する。

表1 x_1 の計算

Step	数式	真の値	丸める
1	b^2	$3 * 3 = 9$	$\rightarrow f(3 * 3) = 8^{*1}$
2	$4c$	$4 * 0.1875 = 0.75$	$\rightarrow f(4 * 0.1875) = 0.75$
3	$b^2 - 4c$	$8 - 0.75 = 7.25$	$\rightarrow f(8 - 0.75) = 7$
4	$\sqrt{b^2 - 4c}$	$\sqrt{7} \approx 2.645$	$\rightarrow f(\sqrt{7}) = 2.5$
5	$-b + \sqrt{b^2 - 4c}$	$3 + 2.5 = 5.25$	$\rightarrow f(3 + 2.5) = 5$
6	$(-b + \sqrt{b^2 - 4c}) / 2$	$5 / 2 = 2.5$	$\rightarrow x_1 = f(5 / 2) = 2.5$

次は a) の計算式で x_2 を計算する。(上記の Step 4 までは同じである。)

表2 a) の計算式による x_2 の計算

Step	数式	真の値	丸める
5	$-b - \sqrt{b^2 - 4c}$	$3 - 2.5 = 0.25$	$\rightarrow f(3 - 2.5) = ?$
6	$(-b + \sqrt{b^2 - 4c}) / 2$	$?? / 2 = ?$	$\rightarrow x_2 = f(?) = ?$

次は b) の計算式で x_2 を計算する。

表3 b) の計算式による x_2 の計算

Step	数式	真の値	丸める
1	c / x_1	?	?

2 二分法による根の計算

二分法によって関数 f の根を計算する時、以下の終了条件を用意する。

- 1) 許容誤差 TOL : $(b - a)/2 < TOL$ (TOL は小さい数値とする)
- 2) 最大計算回数 N : $i \leq N$ (i が計算の回数を数える)

計算アルゴリズム

入力: 区間の両端 a と b ; 許容誤差 TOL ; 最大計算回数 N 。
 出力: 近似解 p 或いはエラー情報

Step 1: $i = 1, FA = f(a)$ (初期化)
 Step 2: While $i \leq N$ do Step 3-6
 Step 3: Set $p = a + (b - a)/2, FP = f(p)$.
 Step 4: If $FP == 0$ or $(b - a)/2 < TOL$ then break the while.
 (While ループを終了する)
 Step 5: Set $i = i + 1$.
 Step 6: If $FA \cdot FP > 0$, then set $a = p, FA = FP$;
 else set $b = p$.
 Step 7: if $i \leq N$ then Output(p);
 else Output("N 回の計算で近似解を見つけられなかった。");

課題 二分法によって, $[0.1, 1]$ の中で $1/x^2 - 2 = 0$ の根を計算しなさい。
 ($N = 20, TOL = 10^{-5}$)

以下は MATLAB 言語で書いた計算コードである。当該コードは MATLAB, 又は Octave のソフトウェアで実行できる。計算の結果を以下の表に入れてください。

Step	Value of p
1	0.55
2	...

リスト 1 二分法による根の計算

```
a = 0.1;
b = 1;
N = 20;
TOL = 1E-5;
format long; %多くの有効数字を表示する。

i = 1;
FA = 1/(a*a)-2.0;

while(i <= N)

%(計算コードをここにいれてください。)

end

if( i<=N )
    sprintf('Solution is found: p = %10.6f', p)
else
    'Solution is not found after N interations.'
end
```

[ヒント: Octave でのコードの実行方法] Editor に使ってソースコードを修正して, $C:\Users\[\ユーザー名]\Documents\$ bisection.m に保存する。次に, Octave を起動して, 端末の画面或いは Command Window が表示される後, 以下の命令でフォルダーを変えて, bisection.m を実行できる。

```
> cd "C:\Users\[\ユーザー名]\Documents"
> bisection
```