

# 数値解析：第3回レポート課題

担当教員：劉雪峰

注意：課題2の計算コードを提出するのは必要である。

## 1 不動点定理

区間  $[1, 2]$  の中で、方程式  $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$  の根を求めるために、以下の不動点式を考える。

1.  $x = g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$
2.  $x = g_2(x) = \sqrt{10/x - 4x}$
3.  $x = g_3(x) = \sqrt{10 - x^3}/2$
4.  $x = g_4(x) = \sqrt{10/(4+x)}$
5.  $x = g_5(x) = x - (x^3 + 4x^2 - 10)/(3x^2 + 8x)$

それぞれの  $g_i(x)$  について、以下の課題を考えよ。

- 1) 縮小写像の不動点定理の2つの条件が満たされるかどうかを確認せよ。
  - a)  $g_i(x) \in [1, 2]$  for all  $x \in [1, 2]$ .
  - b) ある  $0 < k < 1$  に対して、 $|g'_i(x)| \leq k$  for all  $x \in (1, 2)$ .
- 2) 初期値  $p_0 = 1.5$  とし、反復式  $p_{n+1} = g(p_n)$  によって数列  $\{p_n\}_{n=0}^N$  を計算せよ。  $N$  は最大  $N = 30$  とする。

## 2 ニュートン法とセカント法

平方根の逆の計算 コンピュータグラフィックの分野（3Dゲームの開発など）では、照光処理を計算するために、 $1/\sqrt{x}$  の計算はたくさん使用されている。平方根の逆はニュートン法を使って高速に計算できる。例えば、 $x = a$  について、 $1/\sqrt{a}$  は  $f(t) = a - 1/t^2 = 0$  の根となる。これに関する面白い話は次のページに書いている。

<http://www.beyond3d.com/content/articles/8/>

ニュートン法とセカント法を用いて  $f(t) = a - 1/t^2$  ( $a = 100$ ) の根を計算せよ。実際の計算結果を使って、収束オーダーを確認せよ。反復計算の初期値と停止条件は以下のようにする。

- 初期値：ニュートン法の場合,  $p_0 = 1/50$ 。セカント法の場合,  $p_0 = 1/50$ ,  $p_1 = 1/51$ 。
- 停止条件： $|p_{n+1} - p_n| < 10^{-10}$ 。

[ヒント 1：収束オーダーの計算方法]  $p$  を  $f(x) = 0$  の解または近似解とする。反復の回数  $n$  が十分大きい時,

$$\frac{|p_n - p|}{|p_{n-1} - p|^\alpha} \approx \frac{|p_{n-1} - p|}{|p_{n-2} - p|^\alpha} \approx \lambda$$

よって,  $n \geq 2$  のとき, 次の式で収束オーダー  $\alpha$  を計算できる。一般的に,  $n$  が大きい時,  $\alpha$  の計算結果が一定の値となる。

$$\alpha \approx \frac{\log(|p_{n-1} - p|/|p_n - p|)}{\log(|p_{n-2} - p|/|p_{n-1} - p|)}$$

[ヒント 2：結果のまとめ] 計算結果を以下の表にまとめるのはおすすめ。

Table 1: 計算結果

$i$	Newton method	Order	Secant method	Order
0	50	-	50	-
1	$p_1$	-	51	-
2	$p_2$	?	$p_2$	?
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$