

数値解析：第6回レポート課題

担当教員：劉雪峰

今回のレポートを2時間55分以内に完成せよ！

1 反復法によって連立一次方程式を解く

以下の要求に従って、連立一次方程式 $Ax = b$ の解を計算せよ。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Jacobi 法、Gauss-Seidel 法、SOR 法を使って $Ax = b$ の近似解を計算しなさい。SOR 法の場合、 $w = 0.5, 1.2, 1.5, 1.8$ の値を使用すること。初期値の設定は $x^{(0)} = 0$ 。第 k 回の計算で得られた近似解を $x^{(k)}$ とする。反復計算の停止条件は以下のものを使う。

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_2 \leq E - 10 \quad \text{OR} \quad k > 100$$

- 2) 真の解は $x^* = (2, 3, 3, 2)^T$ である。近似解 $x^{(k)}$ の相対誤差を $E(k) := \|x^{(k)} - x^*\|_2 / \|x^*\|_2$ とする。 $\log E(k)$ と k の関係図を描画しなさい。
- 3) 各方法の収束の速さを検討しなさい。

2 条件数の大きい行列

Hilbert 行列は以下のように定義される。

$$H^n := (h_{ij})_{n \times n}, \quad h_{ij} = 1/(i + j - 1).$$

例えば、 H^4 は以下の行列となる。Hilbert 行列の一つの特徴は n が大きくなるとともに、条件数は非常に大きくなる。(図1を参考しなさい)

$$H^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix}$$

ベクトル $b = (1, 0, 0, 0)^T$ と $A := H^4$ の方程式 $Ax = b$ の解を SOR 法で近似解計算して、収束の速度を検討せよ。検討の形式が自由。経験によると、近似解の収束を検討するために、反復計算の回数を500以上にするのは必要である。

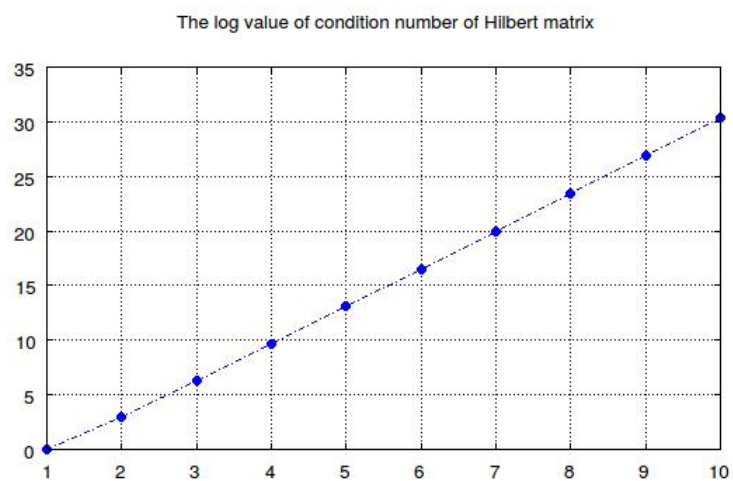


図 1 Hilbert 行列の条件数 (縦軸は条件数の自然対数値) と行列サイズ (横軸) の関係