数値解析：第 9 回レポート課題

担当教員：劉雪峰

1 数値積分公式

数値積分の中点則の誤差評価の証明せよ。

$$\int_a^b f(x)dx = f(\frac{a+b}{2})(b-a) + \frac{(b-a)^3}{24} f^{(2)}(\xi) \quad (\xi \text{ in } [a,b])$$

2 Gauss 積分公式

区間 [0,1] での 3 点 Gauss 積分公式を求めよ。即ち、

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$

[HINT: 座標変換を使って、[-1,1] での積分に変形してから数値積分の計算式を求めよ。]

3 数値積分の計算

以下の関数 f の積分を考えなさい。

$$I(f) := \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$$

1. $I(f)$ の厳密値を求めよ。
2. 課題 2 で求めた 3 点 Guass 積分公式を利用して、$I(f)$ の近似積分を計算せよ。
3. 複合中点則、複合台形則と複合 Simpson 則によって、$I(f)$ の近似積分を計算せよ。それぞれの近似積分を $I_{h,1}$, $I_{h,2}$, $I_{h,3}$ とする。分割点 $x_0 = 0, \cdots, x_n = 1$ に対して、$n = 10, 20, 40$ のように n を選ぶ。

$$\begin{aligned}
\text{複合中点則} \quad & I_{h,1} \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + \frac{h}{2}) \\
\text{複合台形則} \quad & I_{h,2} \approx h \left(\frac{1}{2} f(x_0) + \frac{1}{2} f(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) \\
\text{複合 Simpson 則} \quad & I_{h,3} \approx \frac{h}{6} \left(f(x_0) + f(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} 2f(x_i) + \sum_{i=0}^{n-1} 4f(x_i + \frac{h}{2}) \right) \\
& (h = 1/n)
\end{aligned}$$

4. 近似積分の誤差 $E_{h,i} = |I(f) - I_{h,i}(f)|$ を以下の表にまとめて、誤差のグラフを描画しなさい。ただし、x 軸を $\log h$、y 軸を $\log E_{h,i}$ とする。理論解析の結果に合わせって近似積分の誤差の挙動を検討しなさい。

表 1　近似積分の誤差

h	$h = 1/10$	$h = 1/20$	$h = 1/40$
$E_{h,1}$			
$E_{h,2}$			
$E_{h,3}$			