DIVISORS WITH SMALL DISCREPANCIES OVER 3-DIMENSIONAL TERMINAL SINGULARITIES

早川貴之

Y を normal projective variety で高々 terminal singularity しか持たないようなものとする. もし K_Y が nef でないならば, Y 上に extremal ray R が存在して, それに伴う morphism $\pi : Y \to X$ が $\rho(Y/X) = 1$ かつ $-K_Y$ が f-ample となるように定まる. さらに π は次の (I) または (II) になる.

(I) π は birational morphism であって次の (i), (ii) または (iii) のいずれか.

(i) $\pi : (E \subset Y) \to (P \in X)$ は Y 上の irreducible divisor E を X 上の 1 点 P につぶす.

(ii) $\pi : (E \subset Y) \to (\Gamma \subset X)$ は Y 上の irreducible divisor E を X 上の曲線 Γ につぶす.

(iii) $\pi : Y \to X$ の例外集合が 1 次元.

(II) $\dim X \leq 2$.

(I)(i) と (I)(ii) は divisorial contraction とよばれ, X はまた高々 terminal singularity しか持たないような projective variety になる. (I)(iii) は flipping contraction であり, X は terminal ではなくなる. Y をその flip Y^+ でおきかえて Minimal Model Program をつづける. (II) の場合には $\pi : Y \to X$ は Mori fiber space (Mfs) と呼ばれる. これは Sarkisov program を使って調べられている対象である.

ここで扱いたいのは, (I)(i) の場合, つまり irreducible divisor を 1 点につぶす divisorial contraction $\pi : (E \subset Y) \to (P \in X)$ である. これを $P \in X$ からはじめて, blow up を構成することにより, irreducible divisor E を引き出すという形で考える. π に対して,

$$K_Y = \pi^* K_X + a(E, X)E, \quad 0 < a(E, X) \in \mathbb{Q}$$

とかくとき, $a(E, X)$ を E の X 上の discrepancy という.

このような divisorial contraction $\pi : (E \subset Y) \to (P \in X)$ に対して, 川北氏は [3], [4] において, $|-K_Y|$ の一般元が高々 Du Val singularity しか持たないことを示し, それを用いて多くの場合に π を具体的に分類した. ここでは, E の discrepancy の値が最小あるいは 1 以下であるような場合を考えることにする. そのような divisor は $P \in X$ の上空に有限個しかないので, 容易に扱うことができる.

定義. $P \in X$ を normal variety の germ とするとき, $P \in X$ が terminal singularity (または canonical singularity) であるとは, 次の条件 (i), (ii) が成り立つことをいう.

(i) ある正の整数 m が存在して mK_X が Cartier divisor になる,

(ii) ある特異点の解消 $g : Z \to X$ が存在して

$$K_Z = g^* K_X + \sum_E a(E, X)E$$

(ただし, 和はすべての g の exceptional divisor を動き, $a(E, X) \in \mathbb{Q}$) とかくとき, すべての $a(E, X) > 0$ (またはすべての $a(E, X) \geq 0$).

ここで (i) が成り立つような最小の正の整数 m を $P \in X$ の指数 (index) といい, (ii) に表れる負でない有理数 $a(E, X)$ のことを E の X 上の食い違い係数 (discrepancy) という.

以下では $P \in X$ の特定の特異点解消を定めずに, $P \in X$ のある特異点解消の exceptional divisor に含まれるような prime divisor のことを, $P \in X$ の上空にある divisor と呼ぶことにする.

さて $P \in X$ が index m の terminal singularity のとき, X の上空にあるすべての divisor E について, $0 < a(E, X) \in \frac{1}{m}\mathbb{Z}$ である. 我々のさしあたっての目標は, $P \in X$ の上空にある discrepancy $1/m$ の divisor をすべて見つけて, そのひつひとつを exceptional divisor としてもつような birational morphism $\pi : (E \subset Y) \to (P \in X)$ を構成することである. このような birational morphism は, E を定めるごとに (もし存在するならば,) 一意的に定まる. また Minimal Model Program を使えば実際に存在することもわかる. しかし我々が知りたいのは, 例えば Y の singularity の情報がすべてわかってしまうような, 具体的な構成である.

3 次元の terminal singularity はすべて分類されていて, index が 1 のものは isolated cDV singularity, index が 2 以上のものは (cA/m), $(cAx/4)$, $(cAx/2)$, $(cD/3)$, $(cD/2)$, $(cE/2)$ 型のものに分けられる (cf. [5]). 以下では主として index m が 2 以上の 3 次元 terminal singularity についてのみ考える. これらはすべて 4 次元の cyclic quotient singularity の中で実現されている.

$$\begin{aligned} X &= \{\phi(x, y, z, u) = 0\}/\tfrac{1}{m}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \\ &\subseteq \bar{X} = \mathbb{C}^4/\mathbb{Z}_m = (x, y, z, u)/\tfrac{1}{m}(\alpha, \beta, \gamma, \delta), \end{aligned}$$

ここで座標 x, y, z, u を持つ $\mathbb{C}^4$ を (x, y, z, u) とかき, m 次の巡回群 $\mathbb{Z}_m$ の (x, y, z, u) への作用は, $\zeta = \exp(2\pi i/m)$ とするとき,

$$(x, y, z, u) \mapsto (\zeta^\alpha x, \zeta^\beta y, \zeta^\gamma z, \zeta^\delta u)$$

で定まっている. このとき $\bar{X}$ は, lattice $N = \mathbb{Z}^4 + \frac{1}{m}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)\mathbb{Z}$ と cone $C = (\mathbb{R}_{\geq 0})^4 \subseteq N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ の face 全体からなる fan Δ に対応する toric variety $T_N \operatorname{emb}(\Delta)$ として表される.

$\sigma = (a, b, c, d) \in N$ が $a,\ b,\ c,\ d > 0$ を満たすとき, $\bar{X} = T_N \operatorname{emb}(\Delta)$ の weight σ による blow up が定まり, 次の図式ができる.

$$\begin{array}{ccc} X = \{\phi = 0\}/\mathbb{Z}_m & \longrightarrow & \bar{X} = (x, y, z, u)/\frac{1}{m}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \\ \Big\uparrow \pi & & \Big\uparrow \bar{\pi} \\ Y & \longrightarrow & \bar{Y} \end{array}$$

$\bar{\pi}$ の exceptional divisor を $\bar{E}$ とおき, さらに $E = \bar{E}_{|Y}$, $e = \sigma\text{-}wt(\phi)$ とおけば,

$$K_{\bar{Y}} = \bar{\pi}^* K_{\bar{X}} + (a + b + c + d - 1)\bar{E},$$
$$Y = \bar{\pi}^* X - e\bar{E}$$

となるので, adjunction formula を使えば,

$$K_Y = \pi^* K_X + (a + b + c + d - 1 - e)E$$

となるがこれは一般には正しくはない (cf.[6, p.374]). しかしこの値 $a + b + c + d - e - 1$ が $1/m$ となるような weight を使って, weighted blow up を行う. そうすることによって discrepancy が $1/m$ の divisor を見つけようというわけである. 以下では具体的な例を使って, 実際にどのような計算をしてどのような結果が得られるのかを見ていく.

例 1. $P \in X$ を $(cD/3)$ 型の terminal singularity のひとつである

$$X = \{\phi := u^2 + x^3 + y^3 + z^3 = 0\}/\tfrac{1}{3}(2, 1, 1, 0)$$
$$\subseteq (x, y, z, u)/\tfrac{1}{3}(2, 1, 1, 0)$$

とする (cf.[5, Remark23.1]). 目的は $P \in X$ の上空にある discrepancy が最小つまり $1/3$ となる divisor をすべて見つけ, それらのひとつひとつを exceptional divisor として持つような blow up を具体的に構成することである.

(1) まずどのような weight で blow up すればよいのかの見当をつける. そのために weight

$$\sigma = (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4 + \tfrac{1}{3}(2, 1, 1, 0)\mathbb{Z}, \quad a,\ b,\ c,\ d > 0$$

であって, $e = \sigma\text{-}wt(\phi)$ とおいたとき

$$a + b + c + d - e - 1 = 1/3$$

となるものを求める. ϕ に表れる単項式により $3a \geq e$, $3b \geq e$, $3c \geq e$, $2d \geq e$ となるが, これを使って $\sigma = (a, b, c, d)$ を求めると, $\sigma = \frac{1}{3}(2, 1, 1, 3)$ がただひとつの解になる.

(2) $\pi' : Y' \to X$ を weight $\frac{1}{3}(2,1,1,3)$ での blow up とすると, π' の exceptional divisor $E' = \mathrm{Exc}(\pi')$ について

$$E' \simeq \{y^3 + z^3 = 0\} \subseteq \mathbb{P}(2,1,1,3)$$

となる．よって E' は 3 つの irreducible component E_1, E_2, E_3 をもつ．さらにもう少し計算すると Y' は terminal singularity しか持たず,

$$K_{Y'} = \pi'^* K_X + \tfrac{1}{3}E_1 + \tfrac{1}{3}E_2 + \tfrac{1}{3}E_3$$

となることがわかる．よって $P \in X$ の上空には少なくとも 3 つの discrepancy が 1/3 の divisor が存在する．また Y' の各点での index はすべて 3 以下なので, この 3 つの divisor が $P \in X$ の上空にある discrepancy 1/3 の divisor のすべてである．しかし E' が既約でないため, π' は我々が欲しかったものではない.

(3) そこで 3 次の巡回群の作用と可換な変数変換をして (あるいは同じことだが, $P \in X$ の $(x,y,z,u)/\frac{1}{3}(2,1,1,0)$ への埋め込み方を変更して)

$$\begin{aligned} X = \{u^2 + x^3 + y^2z + yz^2 = 0\}/\tfrac{1}{3}(2,1,1,0) \\ \subseteq (x,y,z,u)/\tfrac{1}{3}(2,1,1,0) \end{aligned}$$

とする．すると先程の weight に加えてより大きな weight $\frac{1}{3}(2,4,1,3)$, $\frac{1}{3}(2,1,4,3)$ で blow up することも可能になる．そこで $\pi : Y \to X$ を weight $\frac{1}{3}(2,4,1,3)$ による blow up とする．すると $E = \mathrm{Exc}(\pi)$ について

$$E = \{u^2 + x^3 + yz^2 = 0\} \subseteq \mathbb{P}(2,4,1,3)$$

となり, E は既約である．さらに Y は terminal singularity しかもたない．(実際には $(cAx/4)$ 型の terminal singularity が 1 つだけ存在する.) これで $\pi : (E \subset Y) \to (P \in X)$ がひとつの discrepancy が 1/3 の divisorial contraction を与えていることがわかった．他の 2 つの discrepancy が 1/3 の divisor も, それぞれ y と z を交換して, あるいは y と $y+z$ を交換して weight $\frac{1}{3}(2,4,1,3)$ で blow up してやれば出てくる．これらの 3 つの blow up は $P \in X$ 上互いに同型ではないので, これで $P \in X$ につぶれる divisorial contraction が 3 つ構成された.

(4) 川北氏の結果 ([4, Theorem1.1]) によれば, $(cD/3)$ 型につぶれる divisorial contraction は discrepancy が 1/3 のものしかないので, この 3 つで最初に与えた $(cD/3)$ 型の terminal singularity につぶれる divisorial contraction のすべてを尽くしている.

(5) ついでの general elephant について少しだけ述べる．$P \in X$ を (3) のように埋め込んでおいて, X 上の divisor D_X を $D_X = \mathrm{div}(y-z)$ と定めると, $D_X \in |-K_X|$ であって D_X は P にのみ E_6 型の Du Val

singularity を持つ. $\pi : (E \subset Y) \to (P \in X)$ を (3) で得られた blow up とし D_X の π による birational transform を $D = \pi_*^{-1} D_X$ とおくと, $D \in |-K_Y|$ であって D は Y の $(cAx/4)$ 型の特異点のところにのみ D_5 型の Du Val singularity を持つ. Discrepancy の値が 1 以下の divisorial contraction に関する general elephant はいつでもこのようにして得られる (cf.[4, Theorem4.1]).

例 1 は, $P \in X$ の 4 次元 cyclic quotient singularity への埋め込み方を少し変更してやれば, その埋め込みでの weighted blow up によって, discrepancy が最小の divisor がひとつずつ引き出せることを示唆している. これは $P \in X$ が $(cD/2)$ 型でないときには正しい (cf.[1]).

定理 2. $P \in X$ を 3 次元の terminal singularity で index m が 2 以上かつ $(cD/2)$ 型ではないものとし, E を $P \in X$ の上空にある divisor で $a(E, X) = 1/m$ を満たすものとする. このとき X の 4 次元の cyclic quotient singularity への埋め込みと weight σ が存在して, $\pi : Y \to X$ を weight σ での blow up とするとき, π の exceptional divisor が E になる. さらに一般には Y は高々 canonical singularity しか持たない.

定理 2 は $P \in X$ が $(cD/2)$ 型の terminal singularity のときには必ずしも正しくはない. $(cD/2)$ 型の terminal singularity のときには, 次の例 3 が示すように, 4 次元ではなくて 5 次元の cyclic quotient singularity に埋め込む必要のあるときがある.

例 3. $P \in X$ を $(cD/2)$ 型の terminal singularity のうちで,

$$\begin{aligned} X &= \{u^2 + xyz + x^{2a} + y^{2b} + z^c = 0\}/\tfrac{1}{2}(1,1,0,1) \\ &\subseteq (x,y,z,u)/\tfrac{1}{2}(1,1,0,1) \end{aligned}$$

$(a,\ b \geq 2,\ c \geq 3)$ の形をしているものとする (cf.[5, Remark23.1]). そして以下では特に $a = 2,\ b \geq 3$ の場合を扱う. 目的は例 1 と同様に $P \in X$ の上空にある discrepancy が 1/2 となる divisor をすべて見つけ, それらのひとつひとつを exceptional divisor として持つような blow up を具体的に構成することである.

(1) 前と同じように

$$\sigma = (a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4 + \tfrac{1}{2}(1,1,0,1)\mathbb{Z}, \quad a,\ b,\ c,\ d > 0$$

として $e = \sigma\text{-}wt(\phi)$ とおく. すると等式 $a + b + c + d - e - 1 = 1/2$ を満たすような σ のひとつとして $\sigma = \frac{1}{2}(1,1,2,3)$ が見つかる.

(2) $\pi' : Y' \to X$ を weight $\frac{1}{2}(1,1,2,3)$ での blow up とすると, π' の exceptional divisor $E' = \mathrm{Exc}(\pi')$ について

$$E' \simeq \{xyz + x^4 = 0\} \subseteq \mathbb{P}(1,1,2,3)$$

となる．よって E' は 2 つの irreducible component E_1, E_2 をもつ．さらに Y' は terminal singularity しか持たず,

$$K_{Y'} = \pi'^* K_X + \tfrac{1}{2}E_1 + \tfrac{1}{2}E_2$$

が成り立つ．よって $P \in X$ の上空には少なくとも 2 つの discrepancy が 1/2 の divisor が存在する．またこの場合にももう少し計算することによって, この 2 つの divisor が $P \in X$ の上空にある discrepancy 1/2 の divisor のすべてであることがわかる．しかし E' が既約でないため, π' は我々が欲しかったものではない．

(3) $P \in X$ の上空で discrepancy 1/2 の divisor のうちのひとつは, 座標 x の weight を大きくした weight $\frac{1}{2}(3,1,2,3)$ での blow up $\pi_1 : Y_1 \to X$ の exceptional divisor として得られる．

(4) もうひとつの discrepancy 1/2 の divisor は通常の 4 次元空間内での座標変換をするだけでは得られない．E' の定義式のひとつの因子である $yz+x^3$ をひとつの座標 t にして, X を 5 次元の cyclic quotient singularity の中へ埋め込む．つまり

$$X = \left\{ \begin{array}{c} u^2 + xt + y^{2b} + z^c = 0, \\ t = yz + x^3 \end{array} \right\} \Big/ \tfrac{1}{2}(1,1,0,1,1)$$
$$\subseteq (x,y,z,u,t)/\tfrac{1}{2}(1,1,0,1,1)$$

としておく．そして $\pi_2 : Y_2 \to X$ を, 座標 t の weight を大きくした weight $\frac{1}{2}(1,1,2,3,5)$ での blow up とする．すると π_2 の exceptional divisor E_2 は既約で Y_2 は terminal singularity しか持たない．さらに

$$K_{Y_2} = \pi_2^* K_X + \tfrac{1}{2}E_2$$

となる．これで $P \in X$ につぶれる discrepancy が 1/2 の divisorial contraction が 2 つ構成された．これですべてである．

(5) 川北氏の結果 ([4, Theorem1.1]) によれば, この場合には $P \in X$ につぶれる discrepancy 1 または 2 の divisorial contraction があるかもしれない．このうち discrepancy 1 のものについては後に命題 8 の中で述べる．

すべての $(cD/2)$ 型の 3 次元 terminal singularity について例 3 で述べたような計算をすることによって次がわかる (cf.[2])．定理 2 と合わせれば, 最初の目的であった, index が 2 以上の terminal singularity について, その上空にある discrepancy が最小の divisor がすべてわかったことになる．

定理 4. $P \in X$ を $(cD/2)$ 型の 3 次元の terminal singularity, E を $P \in X$ の上空にある divisor で $a(E,X) = 1/2$ を満たすものとする．このとき X の高々 5 次元の cyclic quotient singularity への埋め込みと weight σ が存在して, $\pi : Y \to X$ を weight σ での blow up とする

とき, π の exceptional divisor が E になる. さらに一般には Y は高々 canonical singularity しか持たない.

注意. (1) 定理 2, 4 でもし Y が高々 terminal singularity しか持たないならば, $\pi : Y \to X$ は irreducible divisor を $P \in X$ につぶすような divisorial contraction を与える.

(2) 定理 2, 4 の証明は, 例 1, 3 で見たように, 3 次元 terminal singularity の分類を使って各々のタイプの terminal singularity ごとに具体的に weighted blow up を構成することによってなされる. 従って得られる結果は定理の主張よりずっと詳細なものである. 特に Y が terminal singularity しか持たないかどうかもすべて判定することができて, 与えられた $P \in X$ につぶれるような discrepancy の値が最小の divisorial contraction もすべて具体的にわかる. その結果の一部として次の系 5 もわかる.

系 5. $P \in X$ を 3 次元の terminal singularity で index m が 2 以上のものとするとき, divisorial contraction $\pi : (E \subset Y) \to (P \in X)$ であって $a(E, X) = 1/m$ を満たすものが存在する.

さらにこの系で得られる divisorial contraction を繰り返すことにより,

定理 6. $P \in X$ を index が 2 以上の terminal singularity とするとき,

$$X_N \xrightarrow{\pi_N} X_{N-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{\pi_1} X_0 = X$$

という discrepancy が最小の divisorial contraction の列で, X_N が index が 1 の terminal singularity しか持たないようなものが存在する.

この定理 6 もただ単に存在するというだけではなく, 各 $P \in X$ に対して, 定理にあるような列を具体的につくることができる. このとき合成してできる birational morphism $X_N \to X$ の exceptional divisor は, $P \in X$ の上空にある discrepancy が 1 以下の divisor をすべて含むから, 特にそのような divisor が全部でいくつあるのかを知ることができる. 例えば,

命題 7. $P \in X$ を $(cD/2)$ 型の terminal singularity で,

$$X = \{u^2 + xyz + x^{2a} + y^{2b} + z^c = 0\}/\tfrac{1}{2}(1,1,0,1)$$

$(a \geq 2,\ b \geq 2,\ c \geq 3)$ の形をしているものとする. このとき, $P \in X$ の上空にある discrepancy 1 の divisor は, (i) $c = 3$ のとき 2 個, (ii) $c \geq 3$ のとき 3 個である.

さらに命題 7 の $P \in X$ に対して, これらの 2 個あるいは 3 個の discrepancy の値が 1 の divisor をひとつずつ引き出すような weighted blow up を考えることにより, $P \in X$ がいつ discrepancy 1 の divisorial contraction を持つのかを判定することができる.

命題 8. $P \in X$ を $(cD/2)$ 型の terminal singularity で,

$$X = \{u^2 + xyz + x^{2a} + y^{2b} + z^c = 0\}/\tfrac{1}{2}(1,1,0,1)$$

$(a \geq 2,\ b \geq 2,\ c \geq 3)$ の形をしているものとする. このとき, divisorial contraction $\pi : (E \subset Y) \to (P \in X)$ であって $a(E, X) = 1$ となるものが存在するためには,

(i) $a = b = 2,\ c = 3$, (ii) $a = 2,\ c \geq 4$ または (iii) $b = 2,\ c \geq 4$

であることが必要かつ十分である.

命題8 の各場合において, discrepancy の値が 1 の divisorial contraction は, (i) $a = b = 2,\ c = 3$ のときには, $P \in X$ の埋め込みを

$$X = \{u^2 + zt + x^4 + y^4 = 0,\ xy + z^2 - t = 0\}/\tfrac{1}{2}(1,1,0,1,0)$$

と変更しておいて weight $(1,1,1,2,3)$ で blow up することによって得られ, (ii) $a = 2,\ c \geq 4$ のときには, 命題にある埋め込みのままで, weight $(1,2,1,2)$ で blow up することによって得られる.

このやり方で index 2 以上の terminal singularity につぶれるような discrepancy の値が 1 以下の divisorial contraction はすべて求めることができる. そして川北氏の結果 ([4, Theorem1.1,1.2]) と合わせれば, index 2 以上の terminal singularity につぶれるような divisorial contraction は, discrepancy が 2 で $(cD/2)$ 型につぶれる例外的なものを除いて, すべて具体的に得ることができる.

References

[1] Hayakawa, T., Blowing ups of 3-dimensional terminal singularities. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **35** (1999), 515–570.

[2] ———, Blowing ups of 3-dimensional terminal singularities, II. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **36** (2000), 423–456.

[3] Kawakita, M., General elephants of three-fold divisorial contractions, *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), 331–362.

[4] ———, Three-fold divisorial contractions to singularities of higher indices, math.AG/0306065.

[5] Mori, S., On 3-dimensional terminal singularities, *Nagoya Math. J.* **98** (1986), 43–66.

[6] Reid, M., Young person's guide to canonical singularities, *Algebraic Geometry, Bowdoin 1985, Proc. Symp. Pure Math.*, **46**, 1987, 345–416.

920-1192 金沢市角間町 金沢大学大学院自然科学研究科

E-mail address: `thaya@kenroku.kanazawa-u.ac.jp`