３次元アフィン代数多様体の対数的小平次元に関する構造研究について

岸本　崇 *

〒 338-8570 さいたま市桜区下大久保 255 埼玉大学理学部数学科
e-mail: tkishimo@rimath.saitama-u.ac.jp

1　問題の動機・目的

以下で考察する代数多様体は全て複素数体 $\mathbb{C}$ 上で定義されているものとします。射影的な代数多様体 T のある程度大まかな構造、例えば双有理不変な構造を解析しようとする時には、その小平次元 $\kappa(T)$ に付随させて研究する事はオーソドックスな方法である。小平次元に付随させた構造としては、以下の事柄は現在までに良く知られている[1]。

[Projective]

	$\kappa = -\infty$	$\kappa = 0$	$\kappa = 1$	$\kappa = 2$	$\kappa = 3$
$\dim = 1$	$\mathbb{P}^1$	elliptic	others	$--$	$--$
$\dim = 2$	$\mathbb{P}^2$ or ruled		elliptic surface	general type	$--$
$\dim = 3$	uniruled			bir. to elliptic 3-fold	general type

Table 1

上の (Table 1) に出てきた **uniruled** の定義を念の為に振り返っておきます。

定義 1.1 (cf. [Mi-Mo86]**)** n 次元の代数多様体 T が $U \times \mathbb{P}^1$ なる形状をしている代数多様体からの dominant morphism $U \times \mathbb{P}^1 \overset{\text{dominant}}{\cdots\to} T$ を持つときに T は **uniruled** と呼ばれる。但しここで、U は $(n-1)$ 次元の代数多様体とする。

(Table 1) に関して、$\dim = 1$ の時には結果は明らかであり、$\dim = 2$ は曲面の分類理論（以下では $(\mathrm{MMP})_2$ と略す事にします）として良く知られている。$\dim = 3$ の時には３次元極小モデル理論（以下では $(\mathrm{MMP})_3$ と略す事にします）の確立と、宮岡先生-森先生による uniruled 性の数値的判定法 (cf. [Mi-Mo86])、そして３次元のアバンダンスによるものである。

唐突ですが、私の主な興味の対象とは多項式環に関係する諸問題を、アフィン代数幾何学を通して幾何学的に考察する事にあります。多項式環の問題を、ただ多項式をガチャガチャいじくっても巧くいかないことが多いのですが[2]、一度問題を幾何学的に捉えてみると巧くいくことが多々あります。勿論、その様に幾何学的に問題を考察する為にはアフィン代数多様体の構造を深く理解する事が不可欠です。それでは、アフィン代数多様体をどの様に解析したら良いのでしょうか？アフィン代数幾何学では具体的な問題を扱うという問題意識の性質上、双有理不変な性質では不便・不足な事が多く、どちらかと言えば双正則な性質が要求されます。現在、アフィン代数幾何学（より一般には非完備な代数多様体を扱う幾何学）では、小平次元のアフィン版という事で対数的小平次元 $\overline{\kappa}$ に付随させて構造を解析する事が最もオーソドックスな方法の一つです (cf. [Ii77], [Miy01])。射影的な代数多様体に対して (Table 1) で記した事柄の、アフィン版として以下の事柄が現在迄に知られています[3]：

* 新潟の研究集会での講演の機会を与えて下さいました吉原先生、小島先生に深く感謝致します。

[1] 但し、$\dim = 0$, $\kappa = 0$ の箇所はスペースの都合上、省略させて頂きました。$\kappa = 0$ の曲面は $K3$, Enriques, Abelian, hyper-elliptic surface のいずれかに双有理であります。

[2] 単に私の力量不足なだけですが。。。

[3] $\overline{\kappa} = 0$ のアフィン曲面は現在までに藤田先生、小島先生らにより詳しく研究されています (cf. [Fuj82], [Koj99])。

[Affine]

	$\overline{\kappa}=-\infty$	$\overline{\kappa}=0$	$\overline{\kappa}=1$	$\overline{\kappa}=2$
dim = 1	$\mathbb{A}^1$	$\mathbb{C}^*$	others	−−
dim = 2	affine ruled		$\mathbb{C}^*$-surface	log general type

Table 2

まず (Table 2) で出てきた用語の定義をします。

定義 1.2 (cf. [Miy01]**)** n 次元のアフィン代数多様体 X が $\dim(Y)=n-1$ なる代数多様体 Y への射 $\varphi : X \to Y$ でその general fiber がアフィン直線 $\mathbb{A}^1$ に同型である様なモノが存在する時に、X は **affine ruled** であると呼ぶ。尚、この条件は X が $U \times \mathbb{A}^1$ なる形状をしている代数多様体をその Zariski 開集合として含むと言っても同値である。（但しここで、U は $\dim(U)=n-1$ なる代数多様体とする。）

(Table 2) に関して、dim = 1 の時には明らかであるが、dim = 2 の地点ですでに事態は複雑になる。しかしながら、曲面の分類理論 $(\mathrm{MMP})_2$ を効果的に用いる事によって上記の結果は得られる。尚、$\overline{\kappa}=-\infty$ の時の affine ruled 性に関する結果は宮西先生-杉江先生によるもので (cf. [Mi-Su80, Miy01])、$\overline{\kappa}=1$ の時の $\mathbb{C}^*$-ファイブレーションの構造結果は川又先生によるものである (cf. [Kaw79])。これらアフィン曲面の構造定理は多項式環・アフィン代数幾何学の諸問題に対する考察に非常に大きく貢献をしています。例えば、Abhyankar-Moh-Suzuki（鈴木昌和先生）による埋め込み定理とよばれる非常に有用な結果があるのですが、この結果が証明された当初の 1974,75 年頃ではその証明方法は可換環論的な複雑なモノでした (cf. [A-M75])[4]。しかしながら、Gurjar-Miyanishi (cf. [Gu-Mi96]) による埋め込み定理の別証明はアフィン曲面の構造結果を用いるモノで、かなりスッキリと証明を与える事に成功しています。

しかしながら、dim ≥ 3 のアフィン代数多様体に対してはその構造を対数的小平次元に付随させて解析するという試みは現在の所なされていません。この種の解析は、高次元の多項式環・アフィン代数幾何学の諸問題（代表的なものとして Zariski 消去問題、Abhyankar-Sathaye 埋め込み問題、Jacobian 予想等）の幾何学的考察の為に必要不可欠です。今回の我々の目的は dim = 3 の時です。即ち、次の問題です：

問題・目的 1.1 3次元アフィン代数多様体 X の構造を、その対数的小平次元 $\overline{\kappa}(X)$ に付随させて解析する為の枠組みを作る。

射影的な場合の3次元迄の構造結果 (Table 1 参照）と、アフィンの場合の2次元迄の構造結果 (Table 2 参照）を見比べる事によって次の様な予想が自然に考えられます：

予想 1.1 3次元アフィン代数多様体 X に対して：

(1) もし $\overline{\kappa}(X)=-\infty$ であるならば、X は affine uniruled であるか？

(2) もし $\overline{\kappa}(X)=2$ であるならば、X は $\mathbb{C}^*$-3-fold であるか？　即ち、正規曲面 Y への射 $\varphi : X \to Y$ でその general fiber が $\mathbb{C}^*$ であるモノが X には存在するのか？

ここで、上の予想 1.1の中で使用した用語 **affine uniruled** について定義をします。これは射影的な場合での uniruled 性 (定義 1.1) のアフィン版と考える事が出来ます。

定義 1.3 アフィン代数多様体 X の general point $x \in X$ に対して、そこを通過するアフィン曲線 $x \in C \subset X$ でその正規化 $\widetilde{C}$ がアフィン直線 $\widetilde{C} \cong \mathbb{A}^1$ となっているモノが存在する時に、X は **affine uniruled** であると言う。

次の Section 2 では、我々の問題・目的 1.1を考察する際に生じる障害について説明して、Section 3 では3次元アフィン代数多様体 X のコンパクト化に関するある種の幾何学的な条件を付け加えた上では、その障害は（生じるものの）X のアフィン代数多様体としての重要な性質を損なわない程度におさまり、我々の問題・目的 はある程度満足いくものとして達成する事が出来るということを述べます（定理 3.1 参照）。最後に Section 4 では定理 3.1 の証明の概略と、今後の展望について述べたいと思います。

[4] 恥ずかしながら私は Abhyankar-Moh による original の証明を読んだ事がありません。。。

2 問題・目的 1.1 に対する考察方法と起こり得る障害

それでは Section 1 での問題・目的 1.1 に対して、一体どの様に考察したら良いのでしょうか？与えられた３次元アフィン代数多様体 X だけをじっと見つめていてもなかなかどうにもなりません。対数的小平次元 $\overline{\kappa}(X)$ の定義自体がコンパクト化を境界部分が単純正規交叉 (=SNC) 因子となる様にとってから定義されるものですから (cf. [Ii77])、やはりコンパクト化を取るというのは自然だと思います。３次元の場合を考察する前に、２次元の場合、即ちアフィン曲面の場合にどの様にして (Table 2) にある様な宮西先生-杉江先生、川又先生らによる結果が得られたのかをかなり大雑把に振り返っておきたいと思います。

[アフィン曲面の場合の考察方法]

Y を非特異アフィン曲面とします。そして Y を非特異射影的曲面 W に境界部分 $B := W - Y$ が SNC 因子となる様に埋め込んでおきます。ここで曲面の分類理論 $(\mathrm{MMP})_2$ を用いる事によって入れ物である W の構造と、境界部分の因子 $B \subset W$ がどの様に W の中に入っているかを具体的に理解する事が出来ます。対 (W, B) の構造が詳細に理解出来てしまえば、中身のアフィン曲面 $Y = W - B$ は理解する事が出来ます。即ち、この議論は下の様にまとめらめます（図 1 参照）：

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{アフィン曲面 } Y} \arrow[r, "\text{[コンパクト化]}"] & \boxed{\text{対 } (W,B)} \arrow[d, "(\mathrm{MMP})_2"] \\ & \boxed{(W,B) \text{ の構造}} \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

図 1

それでは、３次元アフィン代数多様体の場合も、せっかく３次元極小モデル理論 $(\mathrm{MMP})_3$ という非常に有効な理論があるのだから、同様にコンパクト化を経由して考察するのが確実だと思うのは自然な流れと言えます。即ち次の様な理想である：

[３次元アフィン代数多様体の場合の考察方法（あくまで理想）]

X を非特異３次元アフィン代数多様体とします。そして X を非特異３次元射影多様体 T に境界部分 $D := T - X$ が SNC 因子となる様に埋め込んでおきます。ここで $(\mathrm{MMP})_3$ を用いる事によって入れ物である T の構造と、境界部分の因子 $D \subset T$ がどの様に T の中に入っているかを具体的に理解出来れば、中身の３次元アフィン代数多様体 $X = T - D$ の構造が理解できて良いのになあと思います。即ち、次の様な図が滞りなく実行できれば良いのになあと思います（図 2 参照）：

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{３次元アフィン代数多様体 } X} \arrow[r, "\text{[コンパクト化]}"] & \boxed{\text{対 } (T,D)} \arrow[d, "(\mathrm{MMP})_3"] \\ & \boxed{(T,D) \text{ の構造}} \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

図 2

しかし、この理想は一般には巧くいきません。つまり本当に知りたいのはコンパクト化をした先の対 (T, D) の具体的な構造なのですが、$(\mathrm{MMP})_3$ を経由すると一般には入れ物は T を少しだけ変化させた T' になってしまい[6]、それに伴って境界部分の因子 D の固有変換 $D' \subset T'$ も変化してしまいます。従って、行き着いた先での補集合 $X' := T' - D'$ はもともとのアフィン代数多様体 X から少し変化したモノになってしまいます。（一般には、X' はアフィンになるとも限らない。）但し、行き着いた先の入れ物 T' は少しばかりの穏やかな特異点は生じる可能性はあるけれども、もともとの入れ物である T よりはシンプルな構造をしている事が多い。正確に言うと T' は次の２つのいずれかの性質 (i) 又は (ii) を充たしている：

[6] もう少し正確に言うと、T からスタートして何回か例外因子を収縮したり、又は何回か前フリップ曲線 (flipping curve) と呼ばれる曲線達をひっくり返したりして、有限回の操作の後に T' に到着します。

(i) T' は極小モデル (**minimal model**)、即ち標準因子 $K_{T'}$ がネフである。又は、

(ii) T' は森ファイバー空間 (**Mori fiber space, Mfs**) の構造を持つ。即ち、T' には射 $f: T' \to W$ が存在して次の 3 つの性質を充たしている：

  (a) $\dim(W) \leq 2$ であり、f の全てのファイバーは連結である（即ち $f_*\mathcal{O}_{T'} = \mathcal{O}_W$）；
  (b) $-K_{T'}$ は f-アンプルである。即ち、f によって点に潰れる任意の曲線 $C \subset T'$ に対して $(-K_{T'} \cdot C) > 0$ が成り立つ；
  (c) 相対ピカール数 $\varrho(T'/W) = \varrho(T') - \varrho(W)$ は 1 である。

従って、行き着いた先での補集合 X' の解析はある程度可能であると思われる。そうなると、最終的に問題になってくるのは X' のデータからもともとの X のデータをいかに復元するかにある。この考察を図にまとめると次の様になる（図 3 参照）：

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{3次元アフィン代数多様体 } X} \arrow[r, "\text{[コンパクト化]}"] & \boxed{\text{対 } (T, D)} \arrow[d, "(\mathrm{MMP})_3"] \\
\boxed{X' = T' - D'} \arrow[u, "\text{[復元]}"] & \boxed{\text{対 } (T', D')} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

図 3

しかしながらやみくもに $(\mathrm{MMP})_3$ を走らせると、復元の操作は非常に困難になる。一体、どういう所にその困難さ・障害が生じてくるのかを説明したいと思う：

[起こり得る困難さ・障害]

記号は上と同じモノを使う。T からスタートする $(\mathrm{MMP})_3$ のプロセス $g: T \cdots \to T'$ は有限回の双有理写像の合成として：

$$(T, D) =: (T^0, D^0) \overset{g^0}{\cdots\to} (T^1, D^1) \overset{g^1}{\cdots\to} \cdots\cdots \to (T^{r-1}, D^{r-1}) \overset{g^{r-1}}{\cdots\to} (T^r, D^r) = (T', D'),$$

と分解される。ここで各々の $g^i: T^i \cdots \to T^{i+1}$ は因子収縮か又はフリップであり、D^i は D の T^i 上の固有変換とする。$X^i := T^i - D^i$ を T^i の D^i に関する補集合とする。

(1) $g^i: T^i \to T^{i+1}$ が因子収縮の場合、その例外因子 $E^i := \mathrm{Exc}(g^i)$ は境界部分 D^i に含まれないかもしれない。従って、X^{i+1} は X^i の真の開集合になっているかもしれない。この際、因子収縮 g^i の明確な記述と例外因子 E^i と境界因子 D^i との交叉の仕方が分かれば、X^{i+1} のデータから X^i のデータの復元は可能だが一般にはそれは期待出来ない。

(2) $g^i: T^i \cdots \to T^{i+1}$ がフリップの場合、$\{\gamma_a\}$ を前フリップ曲線の全体で $\{\gamma_a^+\}$ を対応する後フリップ曲線の全体とする。これら前・後フリップ曲線達が $\cup\gamma_a \subset D^i, \cup\gamma_a^+ \subset D^{i+1}$ となっているなら $X^i \cong X^{i+1}$ なのだが、一般的に曲線達 $\{\gamma_a\}$, $\{\gamma_a^+\}$ の T^i, T^{i+1} の中での位置を特定する事は出来ない。結果的に X^i と X^{i+1} のデータを明確に比較する原理はない。

以上の理由によって、X^{i+1} のデータから一歩手前の X^i のデータを復元する事は一般には無理がある。従って、たとえ $X' := T' - D'$ の具体的な構造が理解出来たとしても、そこからもともとの X のデータを帰納的に復元する事は一般的に無理がある。つまり問題は：

問題 2.1 T からスタートする $(\mathrm{MMP})_3: T \cdots \to T'$ を中身の 3 次元アフィン代数多様体 X のデータが復元可能な程度に選択せよ。

現在の所、完全に一般的な設定では問題は巧くはいっていないのだが[7]、次の Section 3 で述べるコンパクト化 $X \hookrightarrow (T, D)$ に関するある種の幾何学的な条件の下では問題 2.1は巧く機能し、結果的に巧く $(\mathrm{MMP})_3$ を選択して X' から X のデータを復元する事が出来る（定理 3.1 参照）。

[7] おそらくどの様なコンパクト化 $X \hookrightarrow (T, D)$、又どの様な $(\mathrm{MMP})_3 : (T, D) \cdots \to (T', D')$ を選択したとしても上で述べた障害が致命的になる 3 次元アフィン代数多様体 X は存在するであろうと思う。

3　問題・目的 1.1に対する結果

この Section では Section 1 で述べた問題・目的 1.1に対しての結果を述べます。その前に記号と今回考えるコンパクト化に関する条件についてまとめておきたいと思います。

[設定・記号]

X を非特異 3 次元アフィン代数多様体として、それを非特異 3 次元射影多様体 T に境界因子 $D := T - X$ が SNC 因子となる様にコンパクト化します。(以後、同じ記号 D で**被約**境界因子を表す事にします。)この時、もし次の条件 $(\dagger)$ を充たすならば、コンパクト化 $X \hookrightarrow (T, D)$ は条件 $(\dagger)$ を充たすという事にします：

$(\dagger)$: 完備線形系 $\mathcal{H} := |D|$ は smooth member を含みネフである。

今回の我々の主結果は次の通りです：

定理 3.1 X を非特異 3 次元アフィン代数多様体とする。この X が条件 $(\dagger)$ を充たすような 3 次元射影多様体 (T, D) に埋め込む事ができたと仮定すると、次の様な図式 $(*)$ で以下の性質 (1) ∼ (5) を充たしているモノを構成する事が出来る：

$$(*)\quad (T, D) =: (T^0, D^0) \overset{g^0}{\cdots\to} (T^1, D^1) \overset{g^1}{\cdots\to} \cdots\cdots\cdots \to (T^{s-1}, D^{s-1}) \overset{g^{s-1}}{\cdots\to} (T^s, D^s) \overset{g^s}{-}$$

$$\to (T^{s+1}, D^{s+1}) \xrightarrow{g^{s+1}} (T^{s+2}, D^{s+2}) \to \cdots\cdots \to (T^{r-1}, D^{r-1}) \xrightarrow{g^{r-1}} (T^r, D^r) =: (T^\sharp, D^\sharp)$$

ここで各 T^i は高々$\mathbb{Q}$-分解的端末特異点しか持たない正規 3 次元射影多様体で、D^i は D の T^i 上の固有変換とする。又、$X^i := T^i - D^i$ を D^i に関する補集合とする。各 $g^i : T^i \cdots \to T^{i+1}$ は因子収縮か又はフリップのいずれかである。

(1) $0 \le i < s$ に対しては、$g^i : T^i \cdots \to T^{i+1}$ の例外集合(これは g^i が因子収縮ならばその例外因子、g^i がフリップならばその前フリップ曲線全体の和集合)は D^i に含まれる。更に g^i がフリップである時には、その後フリップ曲線全体は D^{i+1} に含まれる。

(2) $s \le i < r$ に対しては、$g^i : T^i \to T^{i+1}$ は因子収縮であって、その例外因子 $E^i := \mathrm{Exc}(g^i)$ を非特異点 $p^{i+1} := g^i(E^i) \in T^{i+1}$ に潰す。g^i は $p^{i+1} \in T^{i+1}$ での重み付きブロー・アップ (weighted blow-up) として表され、その重みは適当な正整数 $b^i \in \mathbb{N}$ を用いて $\mathrm{wts} = (1, 1, b^i)$ となっている。更に不等式 $1 \le b^s \le b^{s-1} \le \cdots \le b^{r-1}$ が成り立つ。

(3) $0 \le i \le s$ に対しては $X^i \cong X$ となっている。

(4) $s \le i < r$ に対しては、もし $X^i \cong X^{i+1}$ でなければ X^i は X^{i+1} より (b^i, k^i)-タイプの **half-point attachment** を経由して得られる。但しここで $k^i \in \mathbb{N}$ は $1 \le k^i \le b^i$ なる適当な正整数とする。(**注意： half-point attachment** の定義は後でします。定義 3.1参照。)特に、X^{i+1} は X^i のアフィン開集合でその差は $X^i - X^{i+1} \cong \mathbb{C}^{(k^i-1)*} \times \mathbb{A}^1$ となっている。但しここで、$\mathbb{C}^{(k^i-1)*}$ はアフィン直線 $\mathbb{A}^1$ から $(k^i - 1)$-個の点を引っこ抜いたモノとする。

(5) 一番右端の $(T^\sharp, D^\sharp)$ は $\overline{\kappa}(X)$ の値に応じて次のいずれかを充たす：

  (i) もし $\overline{\kappa}(X) = -\infty$ ならば、$T^\sharp$ は森ファイバー空間になっている。

  (ii) もし $\overline{\kappa}(X) \ge 0$ ならば、$K_{T^\sharp} + D^\sharp$ はネフであり $\overline{\kappa}(X) = \kappa(T^\sharp; K_{T^\sharp} + D^\sharp)$ となっている。

ここで上の定理 3.1の中で使用した用語 (**half-point attachment**) の定義をします。これは別に一般的に用いられている用語ではありませんが、曲面の場合の宮西先生のテキスト [Miy01, 4.4.1. Definition] で定義されているモノの 3 次元の場合の類似と考える事が出来ます。

定義 3.1 $\overline{Z}$ を擬射影的 3 次元代数多様体として、$\overline{V}$ を $\overline{Z}$ を Zariski 開集合として含む射影的 3 次元多様体で境界部分 $\overline{B} := \overline{V} - \overline{Z}$ が因子になっているとします。点 $p \in \overline{B}$ を、そこで $\overline{V}$ が非特異となっている様な点とします。$f : V \supset E \to \overline{V} \ni p$ を重み付きブロー・アップでその重みを $\mathrm{wts} = (1, 1, b)$ として、$E \cong \mathbb{P}(1, 1, b)$ をその例外因子とします(但し $b \in \mathbb{N}$)。$\overline{B}$ の f による固有変換 $B := f_*^{-1}\overline{B}$ が例外因子 E

に $B|_E = \sum_{j=1}^{k} m_j l_j$ なる具合いに交叉しているとします。（但しここで l_j 達は $E \cong \mathbb{P}(1,1,b)$ の互いに異なる ruling として、$m_j \in \mathbb{N}$ は $\sum_{j=1}^{k} m_j = b$ を充たすモノ。）この時、補集合 $Z := V - B$ は $\overline{Z}$ より (b,k)-**タイプの half-point attachment** を経由して得られると呼ぶことにする。定義より、この時 $\overline{Z}$ は Z の Zariski 開集合でその差は $Z - \overline{Z} \cong \mathbb{C}^{(k-1)*} \times \mathbb{A}^1$ となっている事が容易に分かる。

この定理 3.1によってコンパクト化の条件 (†) の下に於いて、到着したシンプルな構造を持つ入れ物 $T^\sharp$ の中での境界因子 $D^\sharp$ に関する補集合 $X^\sharp := T^\sharp - D^\sharp$ のデータから解析をしたかったもともとの３次元アフィン代数多様体 X のデータを復元する事は原理的に可能になる。

定理 3.1にある様に $\overline{\kappa}(X) = -\infty$ の場合には、図式 $(*)$ を経由して最終的に適当な森ファイバー空間 $\pi : T^\sharp \to W$ に到着する訳であるが、実際にはその森ファイバー空間とその中で D の固有変換 $D^\sharp$ がどういった具合いに入っているのかの可能性はもっと詳細に調べる事が出来る。更にその各々の起こり得る森ファーバー空間に対して、途中で出現する重み付きブロー・アップの重みの取り得る範囲も絞り込む事が出来る。即ち、次の事柄が成立する。（記号は定理 3.1の中のモノを用いる。）：

定理 3.2 X を非特異３次元アフィン代数多様体でその対数的小平次元が $\overline{\kappa}(X) = -\infty$ なるものとする。この X が条件 (†) を充たすような３次元射影多様体 (T,D) に埋め込む事ができたと仮定する。この時、次の事柄が成立する。

(1) 到着する森ファイバー空間 $\pi : T^\sharp \to W$（定理 3.1 (5) 参照）と D の $T^\sharp$ 上の固有変換 $D^\sharp$ は次のいずれかで記述できる：

[C_2-**タイプ**] $\pi : T^\sharp \cong \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to W$ は非特異射影曲面 W 上の $\mathbb{P}^1$-バンドル構造になっている。ここで $\mathcal{E} := \pi_* \mathcal{O}_{T^\sharp}(D^\sharp)$ は W 上のランク 2 のベクトル・バンドルで、$D^\sharp \sim \mathcal{O}(1)$ となっている。

[D_2'-**タイプ**] $\pi : T^\sharp \to W$ は非特異射影曲線 W 上のクアドラティック・バンドル (quadratic bundle) で、その general fiber は $(F, D^\sharp|_F) \cong (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(1,1))$ となっている。π の特異ファイバー G は（存在したとして）$G \cong \mathbb{Q}_0^2$ であり、その頂点 v は超曲面特異点 $(T^\sharp, v) \simeq o \in (xy + z^2 + t^l = 0) \subset \mathbb{C}^4 : (x,y,z,t),\ \exists l \geq 1$ となっている。

[D_3-**タイプ**] $\pi : T^\sharp \cong \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to W$ は非特異射影曲線 W 上の $\mathbb{P}^2$-バンドル構造になっている。但し $\mathcal{E} := \pi_* \mathcal{O}_{T^\sharp}(D^\sharp)$ は W 上のランク 3 ベクトル・バンドルである。π の全てのファイバー F は $(F, D^\sharp|_F) \cong (\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$ となっている。

[D_3'-**タイプ**] $\pi : T^\sharp \to W$ は非特異射影曲線 W 上の $\mathbb{P}^2$-ファイブレーションでその general fiber F は $(F, D^\sharp|_F) \cong (\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$ となっている。π の特異ファイバー G は（存在したとして）$G \cong \mathbb{S}_4$ であり、その頂点 v は hyper-quotient singularity $(T^\sharp, v) \simeq o \in (xy + z^2 + t^l = 0) \subset \mathbb{C}^4 : (x,y,z,t)/\mathbb{Z}_2(1,1,1,0),\ \exists l \geq 1$ となっている。ここで $\mathbb{S}_4 \subset \mathbb{P}^5$ は次数 4 の正規有理曲線上の錐である。

[$\mathbb{Q}$-**ファノ**] $T^\sharp$ はピカール数 $\varrho(T^\sharp) = 1$ の３次元 $\mathbb{Q}$-ファノ多様体である。より詳しく、対 $(T^\sharp, D^\sharp)$ は（変形で移り合うモノ同士は同一視して）次のいずれかである：

(i) $(\mathbb{P}(1,1,2,3), \mathcal{O}(6))$;

(ii) $(T_6 \subset \mathbb{P}(1,1,2,3,a), \{x_4 = 0\} \cap T_6)$、但し $a \in \{3,4,5\}$;

(iii) $(T_6 \subset \mathbb{P}(1,1,2,2,3), \{x_3 = 0\} \cap T_6)$;

(iv) $(T_6 \subset \mathbb{P}(1,1,1,2,3), \{x_0 = 0\} \cap T_6)$;

(v) $(\mathbb{P}(1,1,1,2), \mathcal{O}(c))$、但し $c \in \{2,4\}$;

(vi) $(T_4 \subset \mathbb{P}(1,1,1,1,2), \{x_0 = 0\} \cap T_4)$;

(vii) $(T_4 \subset \mathbb{P}(1,1,1,2,a), \{x_4 = 0\} \cap T_4)$、但し $a \in \{2,3\}$;

(viii) $(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(c))$、但し $c \in \{1,2,3\}$, $(\mathbb{Q}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}}(c))$、但し $c \in \{1,2\}$;

(ix) $(T_3 \subset \mathbb{P}(1,1,1,1,2), \{x_4 = 0\} \cap T_3)$;

(x) $(T_3 \subset \mathbb{P}^4, \mathcal{O}(1))$;

(xi) $(T_{2,2} \subset \mathbb{P}^5, \mathcal{O}(1))$;

(xii) $(V_5, \mathcal{O}(1))$、ここで $V_5 \hookrightarrow \mathbb{P}^6$ は $\mathbb{P}^4$ の中の直線達のパラメータ空間であるグラスマン多様体 $\mathrm{Gr}(2,5) \hookrightarrow \mathbb{P}^9$ の３つの general な超平面による切り口である。

(2) X は到着した森ファーバー空間 $T^\sharp$ 上の境界因子 D の固有変換 $D^\sharp$ の補集合 $X^\sharp = T^\sharp - D^\sharp$ からスタートして適当なタイプの half-point attachment（定義 3.1参照）を有限回、繰り返して得られる。より詳しく、その登場し得る half-point attachment のタイプは (1) で記述した森ファイバー空間 $\pi : T^\sharp \to W$ に応じて以下の様に記述される：

[C_2-**タイプ**] もし $X \cong X^\sharp$ でなければ、X は $X^\sharp$ から $(1,1)$-タイプの half-point attachment を繰り返して得られる。特に、差 $X - X^\sharp$ は何枚かのアフィン平面 $\mathbb{A}^2$ の和集合になっている。

[D_2'-**タイプ**] もし $X \cong X^\sharp$ でなければ、X は $X^\sharp$ から $(1,1)$-タイプの half-point attachment を繰り返して得られる。特に、差 $X - X^\sharp$ は何枚かのアフィン平面 $\mathbb{A}^2$ の和集合になっている。

[D_3-**タイプ**] この時には自動的に $X \cong X^\sharp$ となっている。

[D_3'-**タイプ**] もし $X \cong X^\sharp$ でなければ、X は $X^\sharp$ から (b,k)-タイプの half-point attachment を繰り返して得られる。但しここで、$1 \le b \le 2$, $1 \le k \le b$。

[$\mathbb{Q}$-**ファノ**]
- (v), $c = 2$、そして (viii), $c = 1$ の時には自動的に $X \cong X^\sharp$ となる。
- (iv)、(vi)、(viii) $(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2))$、(x)、(xi) そして (xii) の時には、$X \cong X^\sharp$ でなければ X は $X^\sharp$ から $(1,1)$-タイプの half-point attachment を繰り返して得られる。特に、差 $X - X^\sharp$ は何枚かのアフィン平面 $\mathbb{A}^2$ の和集合になっている。
- (iii)、(vii), $a = 2$、(viii) $(\mathbb{Q}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}}(2))$ そして (ix) の時には、$X \cong X^\sharp$ でなければ X は $X^\sharp$ から (b,k)-タイプの half-point attachment を繰り返して得られる。但しここで、$1 \le b \le 2$, $1 \le k \le b$。
- (ii), $a = 3$、(vii), $a = 3$ そして (viii) $(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3))$ の時には、$X \cong X^\sharp$ でなければ X は $X^\sharp$ から (b,k)-タイプの half-point attachment を繰り返して得られる。但しここで、$1 \le b \le 3$, $1 \le k \le b$。
- (ii), $a = 4$ そして (v), $c = 4$ の時には、$X \cong X^\sharp$ でなければ X は $X^\sharp$ から (b,k)-タイプの half-point attachment を繰り返して得られる。但しここで、$1 \le b \le 4$, $1 \le k \le b$。
- (ii), $a = 5$ の時には、$X \cong X^\sharp$ でなければ X は $X^\sharp$ から (b,k)-タイプの half-point attachment を繰り返して得られる。但しここで、$1 \le b \le 5$, $1 \le k \le b$。
- (i) の時には、$X \cong X^\sharp$ でなければ X は $X^\sharp$ から (b,k)-タイプの half-point attachment を繰り返して得られる。但しここで、$1 \le b \le 6$, $1 \le k \le b$。

一方 $\overline{\kappa}(X) = 2$ の時には、$\overline{\kappa} = 1$ の非特異アフィン曲面が $\mathbb{C}^*$-ファイブレーションの構造を持っているという川又先生による結果（Table 2 参照）の 3 次元版として、定理 3.1を用いる事によって次の結果を得る事が出来る：

定理 3.3 X を非特異 3 次元アフィン代数多様体でその対数的小平次元が $\overline{\kappa}(X) = 2$ なるものとする。この X が条件 (†) を充たすような 3 次元射影多様体 (T, D) に埋め込む事ができたと仮定する。この時、X には $\mathbb{C}^*$-ファイブレーションの構造 $\varphi : X \to Y$ が存在する。ここで Y は正規代数曲面である。

4 定理 3.1の証明の概略・今後の展望

最後にこの Section では、定理 3.1の証明の概略と、今後の展望について述べたいと思います。定理 3.1の証明の詳細とその他の定理 3.2, 3.3の証明は RIMS のプレプリント・シリーズ-1435 として RIMS のホームページにありますのでそちらをご覧頂ければ幸いです (cf. [Ki03])[10]。

[定理 3.1の証明の概略]

証明のアイデアは Mella の論文 (cf. [Me02]) の手法と似ています。この Mella の論文 [Me02] での問題設定は uniruled な 3 次元射影多様体 T で $\mathbb{Q}$-分解的、端末特異点しか持たないものがその中に既約非特異なネフ因子 $S \subset T$ を含んだ時に、T からスタートして適当な森ファイバー空間に行き着く $(\mathrm{MMP})_3$ をその非特異曲面 S の近傍である程度明確に記述しようというものであった。そして得られる結果はいわゆる双有理幾何学的なものなので、我々の目的であるアフィン代数多様体の取り扱いには不充分である。更に、実はこの論文 [Me02] では途中に出現してくる因子収縮射の記述が間違っている[11]。Mella の場合、目

[10] 但し、細かい誤植等がありますのでご了承下さい。
[11] 正確に言うと起こり得るケースが抜け落ちている。

的はあくまで双有理幾何学的なモノなのでこの間違いはその後の議論にはさほど影響は無いのであるが、我々の場合は問題意識がアフィン多様体という事で具体的な双正則的な解析が要求される為にその因子収縮射の記述もちゃんと修正しなくてはならない。これらの事柄に注意して、証明の流れは次の様にまとめられる。:

ステップ１：　$(T^0, \mathcal{H}^0) := (T, \mathcal{H})$ と置いて、$\mathcal{H}^0 + K_{T^0}$ がネフかどうかをたずねます。もしネフであれば定理 3.1の主張は言えて終了します。（**注意：**このケースは $\overline{\kappa}(X) = -\infty$ の時には決して起こらない。）

ステップ２：　もしネフでなければ $t^0 := \sup\{\mu \in \mathbb{Q} \mid \mathcal{H}^0 + \mu K_{T^0}$ はネフ $\}$ を考える。これは $0 \leq t^0 < 1$ の間の値を取る。この時、端射線 (extremal ray) が $\overline{\mathrm{NE}}(T^0) \cap \{\mathcal{H}^0 + t^0 K_{T^0}\}^{\perp}$ の中に存在するので、そのうちの一つを適当にとってそれを $R^0 = \mathbb{R}_+[l^0]$ とする。そして R^0 の収縮 (contraction) に付随する有理写像を $g^0 : T^0 \cdots \to T^1$ とする。（**注意：**スタート地点である T^0 は非特異３次元なので g^0 がフリップというケースは起こらないのであるが、以降の帰納的な議論の為にその場合も込めることにします。）この時、g^0 が森ファイバー空間になっているかどうかをたずねます。もし森ファイバー空間になっているなら定理 3.1の主張は言えて終了します。（**注意：**$\overline{\kappa}(X) \geq 0$ である時には、g^0 が森ファーバー空間になる事は決して起こらない。）

ステップ３：　$g^0 : T^0 \cdots \to T^1$ が森ファイバー空間を与えていなければそれは双有理写像となっているが、それが t^0 の値に応じて次の様に記述される事をチェックする：

(1) もし $t^0 = 0$ であるならば、g^0 の例外集合は境界因子 D^0 に含まれる。g^0 は因子収縮射か若しくはフリップ。

(2) もし $t^0 > 0$ であるならば、g^0 は因子収縮射で例外因子 E^0 を非特異点 $p^1 := g^0(E^0) \in T^1$ に潰す。$g^0 : T^0 \to T^1$ は点 $p^1 \in T^1$ での重み $\mathrm{wts} = (1, 1, b^0)$ $(b^0 \in \mathbb{N})$ に関する重み付きブロー・アップとして得られる[12]。更に $(D^0 \cdot l^0) = 1$ となっている。ここで l^0 は例外因子 $E^0 \cong \mathbb{P}(1, 1, b^0)$ の ruling とする。

ステップ４：　$\mathcal{H}^0 \ni D^0, S^0$ の g^0 による固有変換をそれぞれ $\mathcal{H}^1 \ni D^1, S^1$ とする。但しここで、$S^0 \in \mathcal{H}^0$ は条件 (†) の中にある smooth member とする。この時に次の事柄をチェックする：

(1) $\mathcal{H}^1$ はネフでカルティエな線形系で、$S^1 \in \mathcal{H}^1$ は smooth member となっている。

(2) $\overline{\kappa}(X) = \kappa(T^1; K_{T^1} + \mathcal{H}^1)$ となっている。

　ステップ１ ～ ４で、$(T^0, \mathcal{H}^0)$ に対して行った議論を $(T^1, \mathcal{H}^1)$ で置き換えて同様に考察する。以後、帰納的に議論をする。３次元極小モデル理論 $(\mathrm{MMP})_3$ によって、この一連の議論は有限回の後に完了して定理 3.1の主張を得ることが出来ます。

　現在の我々の問題設定に於いて特に注意する箇所はステップ３と４です。即ち、中身の３次元アフィン多様体 X が $(\mathrm{MMP})_3$ のプロセスの中で一体どの様に変化していくのかを具体的・帰納的に記述していく必要があり、その為にはステップ３，４は避けては通れなくなります。尚、帰納的にステップ３を考察する際に於いて、因子収縮射の場合（違う設定ではありますが）Mella の先述した論文 [Me02] に於いてその記述が間違っている事に注意する必要があります。しかし、川北真之氏による非特異点に潰れる３次元端末因子収縮射の分類定理 [Ka01] を現在の我々の設定に適応する事によって、ステップ３の (2) の様に因子収縮射を記述する事が出来ます[13]。

[今後の展望]

　この様にコンパクト化に関する幾何学的な条件 (†) の下に於いては、３次元アフィン代数多様体をその対数的小平次元に付随させて研究する事はある程度可能になる。その結果、予想 1.1で挙げた問題 (2) は（この条件 (†) の下で）成り立つ事も分かった（定理 3.3参照）。しかしながら、予想 1.1の (1) の問題、即ち対数的小平次元が $\overline{\kappa}(X) = -\infty$ の３次元アフィン代数多様体が affine uniruled（定義 1.3参照）であるかどうかは、この条件 (†) を仮定してもまだ分かっていない。この場合、定理 3.2で述べた様に、X は $X^\sharp$

[12] スタート地点である T^0 は非特異ゆえ、g^0 がこのケースの時には実際には $b^0 = 1$、即ち g^0 は普通のブロー・アップとなっている。しかし、以降の帰納的な考察では入れ物は特異点が生じてくる可能性があるから一般的にこの様な記述をさせてもらいました。

[13] 川北氏による非特異点に潰れる３次元端末因子収縮射の分類では起こり得る重みは $\mathrm{wts} = (1, a, b)$, $a, b \in \mathbb{N}$, $\gcd(a, b) = 1$ であるのだが、現在の我々の設定では smooth member $S^0 \in \mathcal{H}^0$ の（固有変換像）の存在を利用すると、この重みを $\mathrm{wts} = (1, 1, b)$ とする事が出来る。

というモノから適当なタイプの half-point attachment（定義 3.1参照）を経由して得られる事が分かっている。結果、$X^\sharp$ が affine uniruled である事を示せば X も affine uniruled である事が分かる。$X^\sharp$ はある種の森ファイバー空間 $\pi : T^\sharp \to W$ の因子 $D^\sharp$ に関する補集合であるわけだが、この森ファイバー空間が C_2, D_2', D_3, D_3'-タイプのいずれかである時にはそのファイバー構造に注目して $X^\sharp$ の中に沢山のアフィン直線 $\mathbb{A}^1$ が入っている事が容易に分かる。しかし問題となってくるのは、$T^\sharp$ がピカール数 $\varrho(T^\sharp) = 1$ の３次元 $\mathbb{Q}$-ファノ多様体になった場合である。この場合、定理 3.2, (2) で挙げた様に１２通りの変形パターンがあるのだが、特別な場合を除いては $X^\sharp = T^\sharp - D^\sharp$ が affine uniruled かどうかが分かっていません。今後の目標の一つとしては、$T^\sharp$ が３次元 $\mathbb{Q}$-ファノ多様体である時にも補集合 $X^\sharp$ に沢山のアフィン直線 $\mathbb{A}^1$ が入っているのを証明する事にあります。

対数的小平次元 $\overline{\kappa} = -\infty$ の３次元アフィン代数多様体の構造研究は、３次元 Zariski 消去問題等、多項式環の諸問題の幾何学的考察には必要不可欠です（例えば [Ki04] 参照）。今回の様な対数的小平次元に付随した３次元アフィン代数多様体の構造解析がその様な諸問題に貢献してくれる事を期待してこれからも精進していきたいと思います[15]。

References

[A-M75] S.S. Abhyankar and T.T. Moh, Embeddings of the line in the plane, *J. reine angew. Math.*,**276** (1975), pp. 148–166.

[Fuj82] T. Fujita, *On the topology of non-complete algebraic surfaces*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **29** (1982), pp. 503–566.

[Gu-Mi96] R.V. Gurjar and M. Miyanishi, *On contractible curves in the complex affine plane*, Tohoku Math. J. **48** (1996), pp. 459–469.

[Ii77] S. Iitaka, *On logarithmic Kodaira dimension of algebraic varieties*, Complex Analysis and Algebraic Geometry (W. L. Baily, Jr. and T. Shioda, eds.), Iwanami Shoten, Tokyo, 1977, pp. 175–189.

[Ka01] M. Kawakita, *Divisorial contractions in dimension three which contract divisors to smooth points*, Invent. Math., **145** (2001), no. 1, pp. 105–119.

[Kaw79] Y. Kawamata, *On the classification of noncomplete algebraic surfaces* (Copenhagen, 1978), Lecture Notes in Math., **732**, Springer, Berlin, 1979, pp. 215–232.

[Ki03] T. Kishimoto, *On the logarithmic Kodaira dimension of affine threefolds*, RIMS preprint series, RIMS-1435 (2003); available at $\mathtt{http : //www.kurims.kyoto - u.ac.jp/home_page/preprint/list/2003.html}$.

[Ki04] T. Kishimoto, *On the compactification of contractible affine threefolds and the Zariski Cancellation Problem*, to appear in Math. Zeit.; available (for subscribers) at the home page in Math. Zeit.

[Koj99] H. Kojima, *Open rational surfaces with logarithmic Kodaira dimension zero*, Internat. J. Math., **10** (1999), pp. 619–642.

[Me02] M. Mella, ♯-*Minimal models of uniruled 3-folds*, Math. Zeit., **242** (2002), pp. 687–707.

[Miy01] M. Miyanishi, *Open algebraic surfaces*, CRM Monograph Series **12**, AMS Providence, RI, 2001.

[Mi-Su80] M. Miyanishi and T. Sugie, *Affine surfaces containing cylinderlike open sets*, J. Math. Kyoto Univ., **20** (1980), pp. 11–42.

[Mi-Mo86] Y. Miyaoka and S. Mori, *Numerical criterion for uniruledness*, Ann. of Math., **124** (1986), pp. 65–69.

[15] まだまだ未熟者なので、なかなか思い通りにはいきませんが。。。頑張っていきたいと思います。