有理曲線配置からなる Zariski k-plet と二面体被覆

徳永浩雄[1]

イントロダクション

C は平面代数曲線とする．C の補空間 $\mathbb{P}^2 \setminus C$ 及び C の特異点の "タイプ" を固定したままのモデュライの研究は 1929 年の Zariski の論文「On the problem of existence of algebraic functions of two variables possesing a given branch curve」以来，トポロジー及び代数幾何学の研究対象として様々な数学者により，考察されてきた．就中，80 年代までは

「node しか持たない曲線の補空間の基本群は可換か？」（Zariski 予想），

「node しか持たない曲線のモデュライは既約か？」（Severi 予想）

がその研究において大きな位置をしめていたようである．

90 年代に入って Zariski pair 等の「各既約成分の次数，特異点，各成分の交わり方等の combinatoric data は等しいがそれらのデータを保ったまま連続的に変型することはできない」と云った現象の研究が行われるようになってきた．本報告もこの流れにそった研究成果に関するものである．本稿のテーマである Zariski k-plet の定義から与える．

定義 0.1. 被約な平面代数曲線の k-組 $(C_1, \ldots, C_k)$ は以下の条件を満たすとき，Zariski k-plet と呼ばれる：

(i) 各 C_i に対し，$T_i(C_i)$ と $T_j(C_j)$ が同相になるような管状近傍 $T_i(C_i)$ が存在する．

(ii) 任意の i, j に対し，$\mathbb{P}^2$ から $\mathbb{P}^2$ への同相写像 $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ で $f(C_i) = C_j$ を満たすものは存在しない．

注意 上記の定義のうち第一の条件は combnatoric data できまる．本稿で扱う例は各 C_i は既約な 2 次曲線とそれに相異なる m 個の点で接し，$(m-1)(m-2)/2$ 個の node をもつ既約 m 次曲線である．

定義 0.2. 被約な平面代数曲線の k-組 $(C_1, \ldots, C_k)$ は以下の条件を満たすとき，強 Zariski k-plet と呼ばれる：

(i) 各 C_i に対し，$T_i(C_i)$ と $T_j(C_j)$ が同相になるような管状近傍 $T_i(C_i)$ が存在する．

(ii) 任意の i, j に対し，$\mathbb{P}^2 \setminus C_i$ と $\mathbb{P}^2 \setminus C_j$ は同相でない．

定義から強 Zariski k-plet が Zariski k-plet になることは自明だが，この二つの概念が本当に異なるものであるということを示す例に関しては筆者は知らない．今後の課題の一つである．

---

[1]東京都立大学大学院理学研究科．尚，本研究は E. Artal Bartolo（Universidad Zaragoza）との共同研究である．

本稿の主結果を述べる前にこれまでの Zariski k-plet 研究の経過を簡単に概観しておこう．

$k=2$ のときは通常 Zariski pair と呼ばれている．その最初の例はその名にある様に Zariski により与えられた以下の例である．

例 0.3. ([19], [20]) (C_1, C_2) は以下の条件を満たす 6 次曲線のペアとする：

(i) C_i は共に既約な 6 次曲線であり，その特異点は 6 個の cusp からなる．

(ii) C_1 については 6 個の cusp 全てを通る 2 次曲線が存在するが，C_2 についてはそのような 2 次曲線は存在しない．

このとき，$\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C_1) \not\cong \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C_2)$ である．特にペア (C_1, C_2) は Zariski pair である．

Zariski の例に関しては 90 年代以降更なる詳しい研究が岡 [10], 島田, Pho 等によりなされている．

Zariski の例を除くと Zariski pair の例は 80 年代まで知られていなかったようである．90 年代に入って多くの Zariski pair が発見された．これらに寄与した研究者は E. Artal, J. Carmona, J. Cogolludo, Degtyarev, 岡, 島田, 難波, 土橋, 徳永等である．これらの結果については [1], [2], [3], [4], [5], [7], [9], [11], [12], [13], [15], [16] を参照されたい．また，$k \geq 3$ の場合については $k=3$ のとき，岡が構成している．また，$k=5$ のとき，Kulikov [8] が例を与えている．本稿では任意の k に関し，Zariski k-plet の例が見つかったことを報告する．

定理 0.4. m は 4 以上の整数とする．combinatoric data が以下で与えられるような次数 $m+2$ の Zariski $[m/2]$-plet $(C_1, \ldots, C_{[m/2]})$ が存在する．

任意の i に対し，C_i は以下の 2 条件を満たす 2 つの既約成分 $C_i^{(2)}$, $C_i^{(m)}$ からなる．

(i) $C_i^{(2)}$ は既約な 2 次曲線，$C_i^{(m)}$ は次数が m で $(m-1)(m-2)/2$ 個の node を持つ．

(ii) $C_i^{(m)}$ は $C_i^{(2)}$ に相異なる m 個の点で接する．

さらに，m が奇数のとき，$(C_1, \ldots, C_{[m/2]})$ は強 Zariski $[m/2]$-plet であり，m が 6 以上の偶数のときは $(C_1, \ldots, C_{[m/2]-2}, C_{[m/2]})$ は強 Zariski $([m/2]-1)$-plet である．

上記の定理の証明には D_{2n}-被覆が重要な役割を果たす．以下 §1 で D_{2n}-被覆 をどのように用いるかを簡単に解説し，§2 で定理の条件を満たす曲線をどのようにして構成するかということを解説する．D_{2n}-被覆の存在性に関する結果と曲線の構成法が分れば定理 0.4 はほぼ自明である．これは §3 で解説する．

§1 D_{2n}-被覆

D_{2n}-被覆に関して詳しいことは [14], [17] を参照されたい．

Y は非特異射影多様体，X は正規射影多様体とし，$\pi : X \to Y$ はこれらの間の有限全射とする．また，Δ_π，$\Delta(X/Y)$ で π の分岐因子をあらわす．Y が非特異なので，Δ_π は余次元 1 の代数的部分集合になることが知られている ([21]).

定義 1.1. 有限全射 $\pi : X \to Y$ が以下の 2 条件を満たすとき，D_{2n}-被覆という．
(i) π から定まる代数拡大 $\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}(Y)$ は Galois,
(ii) $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}(Y))$ は位数 $2n$ の二面体群 $D_{2n} = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^2 = \tau^n = (\sigma\tau)^2 = 1\rangle$ に同型である．

注意 $\pi : X \to Y$ が D_{2n}-被覆であるとき，D_{2n} は X に作用し，$Y = X/D_{2n}$ となる．

$\pi : X \to Y$ は D_{2n}-被覆とする．$\mathbb{C}(X)$ の τ による不変体 $\mathbb{C}(X)^\tau$ は $\mathbb{C}(Y)$ の 2 次拡大となる．Y の $\mathbb{C}(X)^\tau$-正規化を $D(X/Y)$ と表せばこれは Y の 2 次被覆となる．また，X は $D(X/Y)$ の n 次巡回被覆となる．これらの被覆の被覆写像をそれぞれ，$\beta_1(\pi) : D(X/Y) \to Y$, $\beta_2(\pi) : X \to D(X/Y)$ と表す．$\pi = \beta_1(\pi) \circ \beta_2(\pi)$ となることに注意する．

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ から $\mathbb{P}^2$ への写像 f を

$$f : (x, y) \mapsto (u, v) = (x + y, xy),$$

（ただし (x, y), (u, v) はそれぞれの非同次座標とする）とおくと，これはアフィン部分が $u^2 - 4v = 0$ で与えられる 2 次曲線 C_o の沿って分岐する 2 次被覆である．

定理 0.4 の証明の key step として $\mathbb{P}^2$ の D_{2n}-被覆 $\pi : S \to \mathbb{P}^2$ で，$\Delta_\pi = C_o + D$, $D(S/\mathbb{P}^2) = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$，$\beta_1(\pi) = f$，$D$ は $(m-1)(m-2)/2$ 個の node をもつ m 次の既約曲線となるものがいつ存在するかという問題を考えたい．

D は C_o の接しているので f^*D は D^+, D^- の二つの既約成分に分かれる．f に関する被覆変換を σ_f，$\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ の元を (a, b) であらわすと，$\sigma_f^*(a, b) = (b, a)$ である．従って，$D^+ \sim (a, b)$ ならば $D^- \sim (b, a)$ である．

以上のセッティングのもと，定理 0. 4 の証明の key となる命題は以下の通りである．

命題 1.2. $\mathbb{P}^2$ の D_{2n}-被覆で，3 条件 (i) $D(S/\mathbb{P}^2) = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, (ii) $\beta_1(\pi) = f$, (iii) $\Delta_\pi = C_o \cup D$ であり，C_0 の沿っての分岐指数は 2，D に沿っての分岐指数は n である，を満たすものが存在する必要十分条件は $a - b$ が n で割り切れることである．

この命題の証明は [6] を参照されたい．さらに，他の分岐の可能性を許した D_{2n}-被覆を考察することにより，つぎの命題を得る．

命題 2.2. (i) n が奇数のとき，$\mathbb{P}^2$ の D_{2n}-被覆 $\pi : S \to \mathbb{P}^2$ で Δ_π を満たすものが存在すれば π は命題 1.1 の (i), (ii) 及び (iii) の分岐指数に関する条件を満たす．
(ii) n が偶数のとき，$\mathbb{P}^2$ の D_{2n}-被覆 $(n \neq 4)$ $\pi : S \to \mathbb{P}^2$ で Δ_π を満たすものが存在すれば π は命題 1.1 の (i), (ii) 及び (iii) の分岐指数に関する条件を満たす．

(i) は $\beta_1(\pi)$ の分岐因子の次数が偶数であるという点と $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ が単連結であるという事実に D_{2n}-被覆の一般論をあわせて証明できる．(ii) は $\Delta_1(\pi) = C_o + D$ となるのが $n = 4$ の場合に限るという事実から従う．詳しくはは [18] 参照.

§2. 曲線の構成

定理 0.3 にある有理曲線 $C_i^{(m)}$ の構成法に関し説明する.

$g_a(t)$, $h_b(t)$ をそれぞれ次数が a, b の有理函数とする．$\mathbb{P}^1$ から $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ への写像 $\phi_{a,b}$ を

$$\phi_{a,b} : t \mapsto (g_a(t), h_b(t)),$$

で定義する．t は $\mathbb{P}^1$ の非同次座標とする．このとき，次の補題が成立することが簡単に分かる.

補題 2.1. $(i) D_{a,b} := \phi_{a,b}(\mathbb{P}^1)$ とおくと，$D_{a,b}$ は $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ で (a, b) に線形同値である.

(ii) g_a, h_b を一般にとれば，$f(D_{a,b})$ は node を $(m-1)(m-2)/2$ 個もった，次数が $a + b$ の有理曲線である．さらに, $f(D_{a,b})$ は C_o に相異なる $a + b$ 個の点で接する.

§3 定理 0.4 の証明

m は 4 以上の整数とする．すると，$[m/2]$ の整数の組 $(m-1, 1), \ldots, (m-[m/2], [m/2])$ を得る．各組 (a, b) に対し，補題 2.1 にあるような有理曲線を考え，それらに命題 1.2, 1.3 を適用すれば定理 0.3 を得る.

References

[1] E. Artal Bartolo: *Sur les couples de Zariski*, J. Algebraic Geom.**3** (1994), 223 − 247.

[2] E. Artal Bartolo and J. Carmona Ruber: *Zariski pairs, fundamental groups and Alexander polynomials*, J. of Math. Soc. Japan **50** (1998), 521-543.

[3] E. Artal Bartolo, J. Carmona Ruber, J.I. Cogolludo and H. Tokunaga: *Sextics with singular points in special position*, J. of Knot Theory and Its Ramifications **10** (2001), 547-478.

[4] E. Artal Barltolo, J. Carmona Ruber, and J.I. Cogolludo Agustín: *Essential coordinate components of characteristic varieties*, preprint 2002.

[5] E. Artal Bartolo and H. Tokunaga: *Zariski pairs of index 19 and Mordell-Weil groups of $K3$ surfaces*, Proc. London Math. Soc. **80** (2000), 127-144.

[6] E. Artal Bartolo and H. Tokunaga: Zariski k-plets of rational curve arrangements and dihedral covers, to appear in Topology and its Applications.

[7] A. Degtyarev: *Alexander polynomial of degree six*, J. of Knot Theory and Its Ramifications **3** (1994), 439-454.

[8] Vik. S. Kulikov, *On Chisini's conjecture*, Izv. Math. **63** (1999), 1139–1170.

[9] M. Namba and H. Tsuchihashi, *On the fundamental groups of Galois covering spaces of the projective plane*, to appear in Geom. Dedicata.

[10] M. Oka: *Symmetric plane curves with nodes and cusps*, J. Math. Soc. Japan **44** (1992), 375-414.

[11] M. Oka: Two Transforms of Plane Curves and Their Fundamental Groups, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **3** (1996), 399 – 443.

[12] I. Shimada: A note on Zariski pairs, Compo. Math. **104** (1996), 125 – 133.

[13] I. Shimada: Fundamental groups of complements to singular plane curves, Amer. J. Math. **119** (1997), 127–157.

[14] H. Tokunaga: *On dihedral Galois coverings*, Canadian J. of Math., **46** (1994), 1299-1317.

[15] H. Tokunaga: *A remark on Artal's paper*, Kodai Math. J. **19** (1996), 207-217.

[16] H. Tokunaga: *Some examples of Zariski pairs arising from certain elliptic $K3$ surfaces*, Math. Z. **227** (1998), 465-477, *Some examples of Zariski pairs arising from certain elliptic $K3$ surfaces, II: Degtyarev's conjecture*, Math. Z. **230** (1999), 389 - 400.

[17] H. Tokunaga: *Dihedral coverings of algebraic surfaces and its application*, Trans. AMS **352** (2000), 4007-4017.

[18] H. Tokunaga: In preparation.

[19] O. Zariski: *On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve*, Amer. J. Math. **51** (1929), 305-328.

[20] O. Zariski: *The topological discriminant group of a Riemann surface of genus p*, Amer. J. Math. **59** (1937), 335-358.

[21] O. Zariski: *On the purity of the branch locus of algebraic functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **44** (1958), 791-796.