数学の実用性と美と永遠性

学部・学科体験模擬講義

2008.08.04. (吉原)

$\boxed{0}$「博士の愛した数式」[2] p.159 から：

「実生活の役に立たないからこそ，数学の秩序は美しいのだ」と博士が言っていたのを思い出す。「素数の性質が明らかになったとしても，生活が便利になる訳でも，お金が儲かる訳でもない。もちろんいくら世界に背を向けようと，結果的に数学の発見が現実に応用される場合はいくらでもあるだろう。楕円の研究は惑星の軌道となり，非ユークリッド幾何学はアインシュタインによって宇宙の形を提示した。素数でさえ，暗号の基本となって戦争に片棒を担いでいる。醜いことだ。しかしそれは数学の目的ではない。真実を見いだすことのみが目的なのだ」

身近な話題から：

(1) 花弁の数

桜 5, マリーゴールド 13, アスター 21, ひなぎく 34,

ひまわりの花の渦，左まりの渦 21, 55，右回りの渦 34, 89

フィボナッチ（Fibonacci, 1170–1240） 数列

$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89, \cdots$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

(2) 線分 AB 上に点 C を $AB : AC = AC : CB$ となるように取ったとき，この分割を黄金分割といい，$AB : AC$ の比の値 ϕ を黄金比という。これは無理数 $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ である。

ハイヴィジョンの画面の縦横の比，はがきの縦横の比，名刺の縦横の比，パルテノン神殿，ミロのヴィーナス

$\boxed{1}$ 役立っているところは限りなくある。現代科学における数学の役割はちょうど空気のような存在である。普段意識しないところで決定的に大切な役割をはたしている。いくつか典型的な例をあげる。

物理学，化学，生物学，地球科学などの自然科学の諸分野はもちろん，グラフ理論，ネットワーク理論，暗号・情報セキュリティ，数理工学，ファイナンス，保険数学　$\cdots$ ＣＴスキャン。最近，数理生物学という本も出た。

かつて現実への応用などまったく考えないで，完全に観念の世界だけで創られた，非ユークリッド幾何学（とその後の微分幾何学）が現実世界を研究する相対性理論に応用されたのはその典型である。最近では「1 を何回か足すと 0 になる ”数 ”の体系がある。そのような数を座標平面にして，そこで考える図形の研究」が符号理論に使われている。

定義　自然数 n に対して，$\pm 1,\ \pm n$ 以外の約数をもたない n を素数という（ただし，1 は素数にいれない）。

$24 = 2\cdot 12 = 3\cdot 8 = 4\cdot 6 = 2^3\cdot 3$,　$2^{2^4}+1 = 65537$ は素数,　$2^{2^5}+1 = 4294967297 = 641\cdot 6700417$

$\boxed{2}$　美とは何か？音楽，美術における美と数学での美は異なる。聴覚や視覚に訴えるものでない [*]。しかし，数学も美しさと感動をあたえるものである。「こころ」という段階までいけば，同じなのかも知れない。うまく言えない，体験してもらうしかないが，こころのなかでの調和・統一の感じとでも言えようか？例えばよく研究者の間で例に出される「ガロワ [†]理論」などそうである。これは専門的なので高等学校での題材から探せば，数学Aの平面図形の単元は宝庫である。個人的経験で恐縮だが，中学校時代「タレス [‡]の定理」に出会い，非常に不思議な感動した思い出がある。これは皆さんよく知っている次の主張である：「円の直径の両端を A, B として，半円周上に点 C をとると，三角形 ABC は C を直角とする直角三角形になる」というものである。もしだれにも教わらずに図を描いているうち自分で発見したとしたら，どんなに感動するだろう。しかももしその発見が世界初であれば，その定理は自分の名前と共に死後もずっと残るのである。

オイラー（Euler, 1707–1783）の公式

$$e^{\pi i} + 1 = 0 \ ^{\S}$$

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{6} &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} \cdots \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{2^2}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3^2}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{5^2}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{7^2}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{11^2}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{13^2}} \times \cdots\end{aligned}$$

$\boxed{3}$　数学の理論は時間・空間を超越している，つまり，古代からいつの時代もまた，どこの世界でも理論は不変である。ひょっとすると，地球外に高等生物がいて彼（彼女）らが文化を創ったとしても，やはり同様な数学理論を創るであろうと思われる。かといって，数学の研究が現代ではもう終わってしまっているというのでない，ますます発展している。実は，数学は理論の終わりのないことを数学自身が証明しているのだ！

予想 (Goldbach 1690–1764)　2 以外の偶数は，二つの素数の和で表せるであろう。

3 と 5, 5 と 7，11 と 13, 17 と 19 などのように 2 つの素数の差が 2 の組を双子素数という。
未解決問題　無限に多くの双子素数が存在するか？

いくつか参考文献をあげます。図書室や書店で見て気に入ったらじっくり読んでみることを勧めます。

References

1. エアハルト・ベーレンツ（鈴木直訳），「５分でたのしむ数学５０話」2007, 岩波書店
2. 小川洋子：「博士の愛した数式」，2004, 新潮社,
3. 小平邦彦：「怠け数学者の記」，岩波現代文庫 19 2005, 岩波書店,
4. 今野紀雄：「図解雑学，数の不思議」，2001, ナツメ社,
5. 宮腰　忠: 「高校数学＋ α」,2004, 共立出版
6. 藤原正彦，小川洋子：「世にも美しい数学入門」, ちくまプリマー新書, 2005, 筑摩書房

[*] 小平先生は数覚という感覚があると言っておられる [3]

[†] 1811–32, フランスの数学者，20 歳で決闘で亡くなった。

[‡] BC 624–546

[§] $e = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots = 2.71828182845\cdots$