数学の厳しさを体験しよう

– カンの正しさを論理と計算が保証する –

新潟県立新発田高等学校,

２００４年１２月１７日

新潟大学理学部

吉 原 久 夫

１．目的

始めに誤解のないように題目の意味を説明しておくと，数学は論理的に厳密な学問であり，単に答えが出ればよいというようなものでないということである。得られた答えが万人の批判に耐えうるものでなければならない。何故そうなのかを論理的に正しく説明できなくてはならないということである。喜んで厳しいことを求める人は少ないと思うが，この厳しい体験こそが，いざというとき非常に役立つのであるし，また，数学をより好きになるきっかけにもなるのである。

大学では４年生になると卒業研究がある。それに合格して初めて卒業するための必要条件をみたしたことになる。数学科では学部程度では独自の研究まで行けないので，いわゆるゼミというものでその代わりをしている。これは学生が説明役になって，自習してきた内容を黒板の前で，教員や学生に話すのである。このとき，しばしば教員から，ときには先輩からも厳しい突っ込み（質問）を入れられ，レポーターは黒板の前で立ち往生してしまう。本人には相当のストレスであるが，このような体験を経て数学を学ぶ訓練ができる[1]。ＳＰＰの前半は講義の形式で，後半はゼミ形式の演習の予定である。

さて，数学の教科書は単元ごとにまとめられ，互いの単元の間の関係もあまり述べてない。また生徒皆さんも単元どうしの関係も意識したこともないだろうし，また関係も無いように思っているかも知れない。例えば，平面図形，方程式と集合と論証の章で学んだことをすべて用いると新たな発見もできるだろう。具体的な例は下記の３章で取り上げる。

ところで，数学を学問として見ると，他の分野のようにノーベル賞もなさそうだし，一体数学の研究はいまでも進歩しているのだろうか？もう終わってしまった，過去の学問でないのだろうか？受験対策としての問題解決だけの役にしか立たないようにも見える。何か役に立つことがあるのだろうか？という疑問も起こるかも知れない。

この講義では今までの知識で理解できる程度で，少し高校の数学からはなれている部分も加えて，数学の厳しい面と，面白く不思議な面を紹介します。また現在なお数学研究の進展している様子にもふれ，数

[1]最近では卒業研究とは別に４年生より早くゼミを行う大学も増えた。また学生だけで行う自主ゼミというのもある。

学への興味・関心を起こしてもらえればと思います。講義の予定は第３章と第４章です。残りの部分は興味があったら読んでみて下さい。

２．はじめに

とくに数学では正確な議論をする。そのために使う言葉の意味をはっきりと決めておく，これを**定義**という。またある主張が正しいことを示すために論理的に正しい説明も必要になる，これを**証明**という。証明されて得られた結果を**定理**という。ただし教科書でも ”証明 ”という言葉が出てくるが，証明とはどういうものであるかとの ”定義 ”は述べられていない[2]。実例にあたってどういうものか学んでもらいたい。これには数学 A の平面図形の章が最適である。図形の不思議な面白さ，発見の楽しさを味わっているうちに，論理的証明の訓練ができるからである。例えば最後にあげた文献 [2] などいいかも知れない。

数学の主張は時間を超え，空間を超えて不変である。ギリシャ時代に発見された数学はいまでも変更なく正しい，アフリカでもヨーロッパでもアジアでもアメリカでも数学の主張は同じである。

３．黄金比

数学 I（東京図書）の教科書には黄金比[3]という言葉が出ており，その意味は

定義 1. 線分を２つに分割し，全体と大きい部分の長さの比を，大きい部分と小さい部分の長さの比に等しくするとき，この分割を黄金分割，比の値を黄金比とよぶ。

となっている。線分 AB の長さを a とし AB 上に点 C を $AC = b, CB = c = a - b$ と取る。このとき条件から $a : b = b : (a - b)$ である。そこで比の値として $a/b = x$ を採用すれば方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ を得る。これより $x = (1 + \sqrt{5})/2$ であることがわかる。この値はしばしば ϕ で表される。ちなみに $b/a = 1/\phi = (\sqrt{5} - 1)/2$ である。

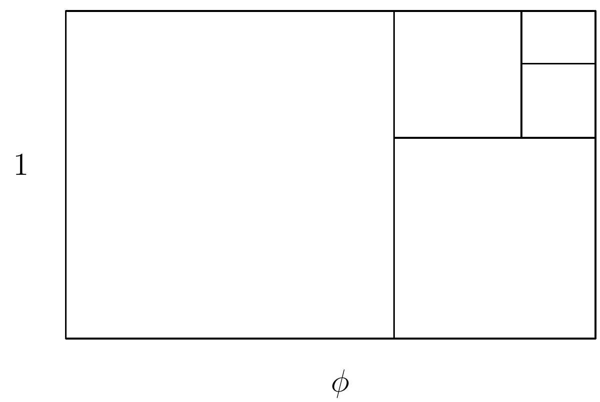
この黄金比（に近い値）は古来沢山の絵画，彫刻，建造物に用いられてきた。パルテノン神殿の縦横の比などがそうである。近年でも名刺，はがき，ハイヴィジョンの画面などに用いられている。美観は個人により様々であるが，確かに黄金分割は調和の取れた安定感があるように思える。それだけでなく実はこの比の中に沢山の数学的な不思議がかくされている。その中のいくつかを紹介しよう。

§ 3.1

[2]実はこういったことを厳密に行うのはかなりやっかいなことである。数学の形式的分野で数学基礎論という分野に属する。

[3]P.39

辺の比が $1:\phi$ である長方形を**黄金長方形**という。今辺の長さがそれぞれ 1 と ϕ の黄金長方形があったとして，この黄金長方形から一辺の長さが 1 の正方形を引き去ると新しい小さな黄金長方形ができる。この長方形からさらに一辺の長さが $\phi-1$ の正方形を引き去ると，さらに小さい黄金長方形ができる。そしてまたこんどは一辺の長さ $2-\phi$ の正方形を引き去る $\cdots$ この操作は無限にくりかえすことができる。



数学の主張では，その逆を考えると興味深いことがしばしばある。上の事実の逆は次のようになる。

問題　縦の長さが 1 横の長さが x で $1<x<2$ の長方形 R_1 があり，上のように短い方の辺を一辺とする正方形 S_1 を内部に作り，R_1 から S_1 を除いた部分の長方形を R_2 とし，これの短い方の辺 $x-1$ を一辺とする正方形を S_2 とする。$\cdots$ このように次々と限りなく小さい正方形を 1 個ずつ作って行けるとしたら，それは黄金長方形に限るか？

この問題に答えるにはまだ知識が不足しているので，数列や極限を学ぶまで待とう。黄金長方形に対して，黄金三角形というものもある。

頂角が $36°$ の二等辺三角形は**黄金三角形**とよばれる。その理由は二等辺三角形 △ABC で $\angle A=36°$ とする。すると AB/BC が黄金比になる。今 $\angle C$ の二等分線を引き辺 AB との交点を D とすると △ABC は △CDB と相似になる。更に △CDB の中に同様に小さい相似な三角形を限りなく作ってゆくことができる。なおこの二等辺三角形は正１０角形の中心と辺を結んで出来る三角形である。この正１０角形の中には黄金比が沢山隠されている。あるいは頂点を一個おきに取り出して，結んでできる星形（ペンタグランマ）の中には沢山の黄金比が隠されている。

問 1.（１）上とは逆に二等辺三角形で等しい辺と残りの辺の長さの比が $\phi:1$ の三角形は黄金三角形であるか？

（２）黄金長方形 ABCD で，$AB : BC = 1 : \phi$ とする。このとき，A と B を中心にしてそれぞれ D と C を通る円をかき，その交点を E とすると，三角形 ABE は黄金三角形であることを示せ。

§ 3.2

数学 A の「集合と論理」の章では背理法を学ぶ。その一つの応用として $\sqrt{2}$ が無理数であることの，整数の性質を用いた証明がある。ここでは，黄金比が無理数であることの証明をしよう。

命題 1.　黄金比は無理数である。

[証明]　背理法による。
（仮定１）黄金比 $x(=\phi)$ が有理数であったと仮定する。

x は方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の正の解であるから，$x = (1+\sqrt{5})/2$ である。これが正の有理数なので，m, n を整数として $m/n = (1+\sqrt{5})/2$ と表せる。この式を変形して，$\sqrt{5} = (2m-n)/n$ と表せる。従って，$\sqrt{5}$ が有理数となって矛盾である。もしこのことも証明しようとするなら，同じく背理法を用いる：
（仮定２） $\sqrt{5}$ が有理数であったと仮定する。

すると a, b を互いに素な正の整数として，$\sqrt{5} = a/b$ と表せる。このとき両辺を平方した式 $a^2 = 5b^2$ を得る。よって a^2 は 5 の倍数である。ところで $a = 5k + r,\ 0 \leqq r \leqq 4$ とおけるので $a^2 = 5(5k^2 + 2kr) + r^2$ である。また $r \neq 0$ なら r^2 を 5 で割ると余りは $1, 4$ になって矛盾である（ここでも背理法が用いられている！）。つまり a^2 が 5 で割り切れれば a も 5 で割り切れる。従って，$a = 5c$ と表せて，これを元の式に代入して，$b^2 = 5c^2$ を得る。すると，同じ議論から b も 5 の倍数であるという結論になり，仮定２に矛盾する。したがって，仮定１にも矛盾する。すなわち，主張は正しい。□

しばし余談 上記の証明は方程式を解いているので，余りいい証明とは言えない。その理由は，方程式が解けないときはこの方法は適用できなからである。例えば $x^3 - x - 1 = 0$ は実数解を一つもつが，それが有理数でないことの証明には通用しない。数学の定理は沢山の結果が出るほど，一般的には，よい定理といわれる。また証明方法もなるべく沢山の主張に適用できるほうがいい方法である。この証明は同様に背理法を使えばできるが，今度は素数の性質：

性質 m と n を整数とし，p を素数とするとき，もし mn が p で割り切れたら，m か，または n は p で割り切れる。

を用いる必要が出てくる。更に一般的な主張にして証明してみよう。

命題 2.　任意の自然数 $n \geqq 2$ に対して，方程式 $x^n - x - 1 = 0$ は有理数の解を持たない。

[証明] 背理法によって証明する[4]。

[4]主張の否定形を作る練習も大切である。

（仮定）ある整数 $n \geqq 2$ に対して，有理数 a/b の解を持ったと仮定する。

すると，$x^n - x - 1 = 0$ に $x = a/b$ を代入して，$a^n - ab^{n-1} - b^n = 0$ すなわち $a^n = b^{n-1}(a+b)$ を得る。もし $b = \pm 1$ なら x は整数であり，その x が $1 = x^n - x = x(x^{n-1} - 1)$ をみたす。しかしこれをみたす整数がないことはすぐわかる（２つの整数を掛けて１になるのは ± 1 の組みしかないので)。従って，b は ± 1 でないので素因子 p を持つ。すると a^n が p で割り切れるので，上記の定理から，a も p で割り切れて，互いに素という仮定に矛盾する。□

問 2. n を 0 でない整数とすると，方程式 $x^2 - nx - 1 = 0$ は有理数の解を持たないことを証明せよ。

§ 3.3

ある長さが与えられたとき，それの黄金分割は定規とコンパスで作図できる。ここで作図の定義を明確にしておかなくてはならない。

作図の定義　作図とは定規とコンパスを，次の２つの方法で，与えられた条件から求める図形を作り出す操作である：

（１）定規は与えられた２点を結ぶ直線を引くためだけに使う。

（２）コンパスは与えられた点を中心に，与えられた半径の円を描くためだけに使う。

次の問は簡単だから自分で解いてみよう：

問 3. AB が与えられたとき，この中点は作図できる。また AB を一辺とする正方形は作図できる。

命題 3.　黄金比は単位の長さ１が与えられたとき，定規とコンパスで作図できる。

[証明] 線分 AB が与えられたとする。このとき問２から，これを一辺とする正方形 $ABCD$ を作図し，AB の中点 E を中心とする半径 EC の円弧が，AB の延長と交わる点を F とする。$AB = 1$ とすると EC の長さは $\sqrt{(1/2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}/2$。これは EF の長さでもあるから，$AF = (\sqrt{5} + 1)/2$ となる。 □

問 4. （１）直線 l とその上にない点 P が与えられたとき，点 P を通り，l に平行な直線を作図せよ。

（２）長さ a, b が与えられたとき，$a \cdot b, a/b$ の長さを作図で見つけよ

§ 3.4

ここでしばし雑談：歴史上有名な話をひとつ。作図については青年ガウスの有名な話がある。 1796 年 3 月 30 日の朝, 18 歳の青年ガウスが目ざめてベッドから起き出ようとする刹那に正 17 角形の作図法に思いついたという。これは２千年来だれも考えたことのない発見であった。ガウスの数学日記は次の通り：

『正多角形の中で三角形，五角形，１５角形及び辺数を次々に２倍して生ずるものの作図が可能であることは幾何学の初歩を学んだもの

は誰でも知っていることで，そこまでは既にユークリッドの時代に出来ていたのであるが，その後は初等幾何学ではそれ以上には出来ないと信ぜられていたように見える ･･･ 上記の正多角形の他になお多くのもの，例えば１７角形などの作図が可能であることの発見は注意に値すると考える ･･･ 少なくとも予に於いては高等整数論の研究は今もこの後も数学中最上のもので，いかほど美しい天文学上の発見でも高等整数論が与える喜びに比べれば言うに足りないのである。』（[4] 参照）

ガウスが偉大なのはこの作図の方法が定規とコンパスを具体的にどのように使って描くかを示したのでなく，方程式の理論からの結論として，理論的にその可能性を証明したことである。その理論によれば例えば正７角形は描けないことも分かるのである。

４．連分数

§ 4.1

$\sqrt{2}$ を小数で表すと $1.41421356\cdots$ のように（一夜一夜に人見頃 ･･･ と）無限につづくことを知っている。ここでは $\sqrt{2}$ を別に表わす方法を紹介しよう。いま整数部分を表す記号 $[\ ]$ を次のように定義する：

定義 2. 実数 a に対して，$[a]$ は a の整数部分を表すとする，すなわち，$n \leqq a < n+1$ となる整数 n に対して，$[a]=n$ と定義する。

よって $[\sqrt{2}]=1$ である。従って $\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)$ である。また $\sqrt{2}-1=1/(\sqrt{2}+1)$ よって，

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=1+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}$$

再び，$\sqrt{2}-1=1/(\sqrt{2}+1)$ を用いて

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}$$

を得る。この操作を続けて結局 $\sqrt{2}$ が

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}}$$

と表されることがわかる。この方法は

[**方法**] 実数を整数部分と１より小さい非負の実数部分に分け，実数部分が０でなければその逆数をとる。

という操作を繰り返す。というものである。練習として $\sqrt{3}$ を試みてみよう。1 と 2 の繰り返しになる：

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}$$

問 5. $\sqrt{5}$ を連分数展開してみよう。

§ 4.2

さて黄金比を連分数で表そう。$\phi = 1 + \dfrac{1}{\phi}$ の関係に注目すると簡単に

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}$$

のように見事にきれいに 1 だけ並ぶ連分数の表示を持つことがわかる。黄金比は図形的な美しさも，数字の並びの美しさも持っている。

ここで，逆に連分数表示を途中でストップして計算してみると：

$$1,\quad 1 + \frac{1}{1},\quad 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}},\quad 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}},\ \cdots$$

これらの値はそれぞれ

$$1,\ 2,\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{8}{6}, \cdots$$

である。これは実はフィボナッチ数列という特別な数の列から作られた分数の列と一致している。実はこのことからも上の連分数表示が黄金比 ϕ を表していることがわかる。

5．無理数

すこし話題を発展させよう。有理数を小数で表したとき 1/7 などは有限で終わらないで循環する。では有理数を連分数で表わしたときは

どうなのか？その表示はいつかは終わるか？（これを有限の表示を持つという）例えば

$$\frac{43}{30} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}}$$

である。有限表示をもてば有理数であることは簡単にわかるが，ではその逆の主張は成り立つかというと，実は次の定理がなりたつ：

定理 1. 実数が有限の連分数表示をもつ必要十分条件はそれが有理数であることである。

これは小数展開のときと異なり，分かりやすい主張である。では上の例 $\sqrt{2}$ の展開のように，循環する無理数はなにか特徴があるのかというと，イエスである。答えは次の通り：

$\sqrt{2}$ や ϕ などはそれぞれ，$x^2 - 2 = 0$, $x^2 - x - 1 = 0$ の解である。このように整数を係数とする２次方程式の解になる無理数を２次の無理数という，もっと正確に述べると：

定義 2. 整数 a, b, c を係数とする２次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解となる無理数を２次の無理数という。

このように定義をしておくと特徴を述べることができる。

定理 2. 実数 a に対して，a が循環する連分数に表されることと，a が２次の無理数であることと同値である。

このことから，$\sqrt[3]{2}$ や π などは連分数で表したとき決して循環しないこともわかる。

ちなみに

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \ddots}}}}$$

である。

また２次の無理数には別の特徴がある。3.3 で ϕ を作図したように，２次の無理数は作図できるということである。少し正確にいうと

定理 3. 単位の長さ 1 が与えられたとき，定規とコンパスを用いて，有理数や２次の無理数は作図できる。

問 6. $\sqrt[3]{2}$ は無理数であることを $\sqrt{2}$ が無理数であることの証明にならって証明せよ。

不思議に思うかも知れないが，$\sqrt[3]{2}$ は（上の意味で）作図できない量なのである[5]。じつは無理数には沢山の種類がある。無理数の定義を次のように言い換えてみると鮮明になろう：

定義 3. 整数 a, b をどのように選んでも（ただし，$a \neq 0$），これらを係数とする１次方程式 $ax + b = 0$ の解とならない実数を無理数という。

さて，定義２の２次の無理数は無理数のうちで，最も ”次数の低い ” ものであることがわかる。$\sqrt[3]{2}$ は $x^3 - 2 = 0$ の解になり，次の問の主張が成り立つので，同様に３次の無理数という。

次の問は少し難しいかもしれないが挑戦してみよう。

問 7. $\sqrt[3]{2}$ は２次の無理数でないことを証明せよ。

難しい事実：円周率 π は小学校以来なじみ深いが，これが無理数だということは知っていると思う。しかしその証明は難しい。じつは単に無理数というだけでなく，とてつもない無理数なのである。

定理 4. 円周率 π は係数が整数のどのような方程式の解にも決してならない。

このような無理数を**超越数**という。もちろん作図は不可能である。円周率が超越数であることは，1882 年にリンデマンによって証明された。

注意 係数が整数の $\cdots$ ということに注目しないと意味がない。例えば係数は実数でもよいとすると，$x - \pi = 0$ という１次方程式の解となる！

６．ディオファントス方程式

複数の未知数があって，方程式の個数が未知数の個数より少ないと一般的には解が沢山出てくる。たとえば最も簡単な場合：$2x + 4y = 1$ をみたす実数の組 (x, y) は無限にある。しかし解に条件を付けると状況は変わってくる，例えば解として整数の組 (m, n) とするとどうだろうか？右辺は偶数なのに左辺は奇数 1 なので解なし，となる。

問題　$10n + 9$ と $5n + 4$ がそれぞれある整数の平方になるとき，n を求めよ。

この問題を解こうとすると，必要条件として，$x^2 - 2y^2 = 1$ をみたす整数 (x, y) のすべての組を求めることに帰着する。この方程式では $(x, y) = (1, 0), (3, 2)$ という解があることはすぐわかる，その他にないのか？あるとすれば全部求めることはできるのか？実はこのすべての

[5]ギリシャ３大不可能問題の一つ。その３つは作図に関するもので，角の三等分の不可能，立方体倍積，円積問題である。

解を求めることと $\sqrt{2}$ の連分数展開とが深い関係をもっているのである。展開を途中でやめて普通の分数を作ると：

$$1,\ \ 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},\ \ 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=\frac{7}{5},\ \ 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}=\frac{17}{12},\ \cdots$$

であり，それぞれ $(3,2),(7,5),(17,12),\ldots$ が $x^2-2y^2=\pm1$ の解となる！実はすべての解を求めることができる，その証明は少し難しいので省略するが，答えは次ぎの通り：すべての解は $(\pm x_n,\pm y_n)$ の形をしていて，

$$\begin{cases} x_n=\{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n\}/2 \\ y_n=\{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n\}/2\sqrt{2} \end{cases}$$

である。

上の問のようにいくつかの未知数を含む多項方程式の整数解，または有理数解を求める問題をディオファントス問題という。もっとも有名な問題は 350 年かかってやっと近年解決した，フェルマーの最終定理であろう：

定理 5. $n\geq3$ の整数のとき $X^n+Y^n=Z^n$ をみたす整数の組 (X,Y,Z), $XYZ\neq0$ は存在しない。

問 8. $n=2$ のときできるだけ沢山の解 (X,Y,Z) を見つけよ。

$n=2$ のときは無限に解が存在することがわかる。これは直角三角形の 3 辺がすべて整数でできているものを求めることと同じである。このような三角形をピタゴラス三角形という。

上のフェルマーの定理の式で両辺を Z^n で割り，$x=X/Z,\ y=Y/Z$ とおけば，$x^n+y^n=1$ の有理数の解 $(x,y),xy\neq0$ を求めることと同値になる。そうすると平面上にこの関係のみたす点の集合，すなわち曲線を考えるということもでき，この曲線の上にある x,y 座標が共に有理数の点を探すことと同値になる。ちなみに $n=2$ のときはこの曲線は半径が 1 の円となり，単位円上の x,y 座標ともの有理数の点を求めることと同じになる。このように数量と図形の両方を考えることで問題の本質がよく見えて，問題が解決することも多い。

数学で扱われるいろいろな対象はお互いに密接な関係をもっていることが多い。練習問題を解くときも，いろいろな方法を考えてみると面白いし，力もつくことになる。

７．大学への展望

大学で学ぶ数学は基本的には今までと変わらないものであるが，更に大きく拡がり進展し内容も深まる。特徴は

・より議論の正確さが必要になる。
・抽象的で一般的になる。
・ときには芸術かと思わせる美を感じさせる理論もある。
などある。そして次のような疑問にも（ほぼ）答えてくれるであろう：

（１）２次方程式の解の公式を学んだが，では $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の解の公式はあるのか？ さらに ４，５ ⋯ 次方程式の解の公式はあるのか？そもそも解はあるのか？

（２）整数 ⇒ 有理数 ⇒ 実数 ⇒ 複素数と範囲を広げてきたけどこの先に何か新しい数はあるのか？

（３）直線，平面，空間と広がってくるけど，それに続くものはあるのか？４次元空間という言葉を聞くけどどういうものなのか？

（４）宇宙の話で曲がった空間と言う言葉を聞くけど，そういうものを数学でも考えているのか？

（５）２次関数，三角関数，指数関数，対数関数など学んだが，他に特別な関数はあるのか？またこれらは実数を変数とするが，変数も値も複素数の関数はあるのか？

（６）"虚円 "$x^2 + y^2 = -1$ は空集合として片づけられてしまっているが，何か意味のある対象なのか？

では逆に今まで疑問に思っていたことが解決することもあるのか？例えば次の問にこたえられるか？

（７）なぜ $1 + 1 = 2$ なのか？なぜ 0 で割ることはできなのか？

（８）虚数など何か役に立つことはあるのか？

（９）反比例のグラフの双曲線は無限の彼方でつながっていると聞いたことがあるが，本当なのか？

（１０）アキレスとカメの問題は解決するのか？

（１１）数学の理論は真に完璧に完全なのか？

８．現代数学への展望

§ 8.1　実は中学生にも問題の意味がわかるのに，現代数学でも解決できない問題は沢山ある。例えば

未解決問題（ Goldbach 予想）$4 = 2 + 2,\ 6 = 3 + 3,\ 8 = 5 + 3,\ 10 = 7 + 3 = 5 + 5,\ 12 = 5 + 7, \cdots$ のように，2 以外の偶数は，２つの素数の和として表せるか？

もしこれを解決したなら，数学の歴史に名前を残す程有名になるであろう。数学は現在でもますます発展を続けている。もちろん現代科学の基礎として使われている数学は過去に完成したものが多いが，なかには近年のコンピュータサイエンス，情報科学の基礎になっている符号理論などのように，全く抽象的で完全に観念の産物と思われていた理論が使われることもある。

§ 8.2　数学研究方法の他の分野と大きく異なる所は，基本的には研究するうえで ”何もいらない ”ことであろう。実験設備もいらない，膨大な資料もいらない，調査をする必要もない。自分の ”あたま ”だけである。だから道を歩いていても数学の研究（学習）はできる。（但し，交通事故には注意が必要！），寝ころんでいてもできる。（怠け者と間違えられるから注意！）しばしば紙と鉛筆は必要になるが，最終的にはそれすら必要ない。

過去においては現実には役に立たないもの，あるいは役に立つことは考えないで，純粋に理論的興味だけで研究されていた数学が何世紀か後になって役に立っているのである。一番の典型は非ユークリッド幾何学から発展したリーマン幾何学が，アインシュタインによって相対性理論に使われたことであろう。

§ 8.3　数学にはノーベル賞はない，しかしそれに代わるフィールズ賞というものがある。また 2001 年ノルウェー政府によってアーベル賞[6]という賞も作られ，第一回の受賞者に 2003 年 4 月フランスの Jean Piere Serre 氏が受賞した。ちなみに Serre はフィールズ賞も 1954 年に受賞している。日本人でフィールズ賞を受賞した数学者は３人である。

数学理論はますます内容を深める一方，物理，化学，生物，⋯ から情報，経済までその応用を広げダイナミックにその裾野を広げているのである。

９．人名・参考文献

講演に関連した人名をあげる。このほかにも沢山著名な数学者はいる。下の文献 [3] で伝記を読んでみることをお勧めします。とくに２０歳５ヶ月で決闘で亡くなってしまったガロワの伝記はフィクションよりもっと面白いと思う。大学入試に２回とも失敗し，学生運動で警察に逮捕され監獄の中でも数学の研究をしていた。ガロワは中学生のとき連分数の研究をしていたという。５次以上の方程式の解の公式は無いという結論を含むガロワの理論は２００年経ても今なお数学の研究の基礎理論として重要である。

ユークリッド　（ギリシャ，330–275 BC）
フェルマー　（フランス，1601–1665）
ガウス　（ドイツ, 1777–1855）
アーベル　（ノルウェー，1802–1829）
ガロワ　（フランス, 1811–1832）
リーマン　（ドイツ，1826–1866）

参考文献

[1] 図解雑学　フェルマーの最終定理　富永裕久著　ナツメ社
素人の視点から書かれた初等整数論紹介の本

[6] http://www.norway.or.jp/infolink/topics/030404.html

[2] 幾何への誘い　岩波現代文庫　学術 7　小平邦彦著　岩波書店
　フィールズ賞受賞者が一般人向けに書いた本
[3] 数学をつくった人々上・下　東京図書　E.T. ベル著 ；
　早川書房からこの本の文庫版が出ている。
[4] 近世数学史談，高木貞治著，岩波文庫
　少し難しい部分の数学関係は読み飛ばしても十分面白い。
[5] 数学のアイデア（甦るガウスの夢），ハッル，東京図書
　ガウスの伝記がコンパクトにまとめられている。