（2005 SSI テキスト続き）

§6．ディオファントス方程式

問題 1.　未知数が x と y の次の 2 つの方程式を考える。

$$2x + 3y = 1 \quad \cdots \text{①}$$
$$2x + 4y = 1 \quad \cdots \text{②}$$

① について，これをみたす整数の組み (x, y) を見つけよ。たくさん見つけられたか？それぞれの解の間に何か関係があるか？すべての解を見つけることはできるか？
② について，これをみたす整数の組み (x, y) を見つけよ。次に有理数の組みでは沢山見つけられたか？

古来整数に関係した問題は多い，有名なものに次のようなものがある。
「3 辺の長さがすべて整数の直角三角形はどのようなものがあるか？」
このような三角形をピタゴラス三角形という。これは $X^2 + Y^2 = Z^2$ をみたす正の整数の組 (X, Y, Z) を求めることと同じである。 $X = 3, Y = 4, Z = 5$ などがそうである。その他にも $X = 5, Y = 12, Z = 13$ などある。しばらく考えるとたくさん見つかるとおもう。ではすべてを見つけられるか？
すべての整数の組みを求めることを考えてみよう。$Z \neq 0$ としてよいので $X/Z, Y/Z$ が有理数である。そこで $x = X/Z, y = Y/Z$ とおいて，平面上で方程式 $x^2 + y^2 = 1$ の表す円を C とするとき，C の上で有理数の座標を持つ点を求めることと同じになる。このように座標平面上の点 $\mathrm{P}(a, b)$ で a と b が共に有理数である点を有理点という。
(1) 点 $\mathrm{P}(0, 1)$ を通り，0 でない傾き t の直線と C との交点のうちで，P 以外のものを Q とする。このとき Q の座標を t を用いて表す。
(2) 点 $\mathrm{P}(0, 1)$ を通り，傾きが 0 でない有理数の直線と C との交点は有理点であることを示す。
(3) $\mathrm{P}(0, 1)$ でない有理点と $\mathrm{P}(0, 1)$ を通る直線の傾きは有理数である。
(4) 以上よりすべての有理点を求めることができる，特に C の上には有理点が無限にある。

整数の性質を用いてすべての組みを求めることもできるが，ここでは図形を用いて求める方法を紹介した。上の問のようにいくつかの未知数を含む多項方程式の整数解，または有理数解を求める問題をディオファントス問題という。もっとも有名な問題は 350 年かかってやっと近年解決した，フェルマーの最終定理であろう：

定理 1. $n \geq 3$ の整数のとき $X^n + Y^n = Z^n$ をみたす整数の組 $(X, Y, Z), XYZ \neq 0$ は存在しない。

もう一つ，連分数展開を用いて解けるディオファントス問題をあげる。

問題　$10n+9$ と $5n+4$ がそれぞれある整数の平方になるとき，n を求めよ。

この問題を解こうとすると，必要条件として，$x^2-2y^2=1$ をみたす整数 (x,y) のすべての組を求めることに帰着する。この方程式では $(x,y)=(1,0),(3,2)$ という解があることはすぐわかる，その他にないのか？あるとすれば全部求めることはできるのか？実はこのすべての解を求めることと $\sqrt{2}$ の連分数展開とが深い関係をもっているのである。展開を途中でやめて普通の分数を作ると：

$$1,\quad 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},\quad 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=\frac{7}{5},\quad 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}=\frac{17}{12},\ \cdots$$

であり，それぞれ $(3,2),(7,5),(17,12),\ldots$ が $x^2-2y^2=\pm 1$ の解となる！実はすべての解を求めることができる。

発展問題 2. 方程式 $3x^2+2y^2=2$ をみたす有理数の組み (x,y) が無限にあるかどうか考えてみよう。この集合を平面上で表し，それを C[1] とする。前ページの (1) ～ (4) の方法によって，無限にあることを示せ。

§7. 高校生 GAUSS の発見— 素数に関して —

高校生のガウスは現代で素数定理とわれる重要な定理を発見した。そのことを紹介するが，その前に簡単な年譜を書いておく。

7.1 ガウス略伝 (cf. [1])

- 1777. 4. 30 Braunschweig（ドイツ）に生まれる。
- 1787 頃，1 から 100 までの和をもとめる問の話。
- 1792 カロリン高等学校に入学
- 1792 – 1793 素数の分布についての発見 “n 以下の素数の個数はおよそ $n/\log n$ ”
- 1795 Göttingen 大学に入学
- 1796 正 17 角形の作図法の発見

[1] これは楕円というもので，数学 C で学ぶが，そのことは知らなくてもこの問は解ける。

- 1799 「代数学の基本定理」を証明， Helmstedt 大学で博士号取得
- 1800 –1835 非ユークリッド幾何学（ガウス，ボヤイ，ロバチェフスキー）
- 1801 「整数論考究」を出版， ケレスの軌道の決定
- 1807 Göttingen 大学教授兼天文台長
- 1809 天体運動論を発表，最小自乗法
- 1827 曲面論（曲率半径の概念）
- 1833 電磁気学とトポロジー
- 1855 Göttingen にて没 (享年 78)

7.2 素数について

整数の問題では小学生にも意味が理解できるのに，現代の最先端の数学でも解決できない問題が沢山ある。例えばコラッツの問題というものがある：

「自然数 n に対して，これが奇数なら 3 倍して 1 をたす。偶数なら 2 で割る。これを繰り返すとはじめにどんな n を選んでも，いつかは $1 \to 4 \to 2 \to 1$ の繰り返しになる。」これはすべての自然数について成立するか？

問題 3. $n = 26, 15$ についてこのことを試みよ。では $n = 27$ ではどうか？

数について深い関心ととびぬけた才能をもっていたガウスは，すでに高校生のころから第一線の研究を始めていた。まず，そのことを紹介しよう。

定義 自然数 n に対して，± 1 と $\pm n$ 以外の n の約数を真の約数という。真の約数をもつ n を合成数といい，1 より大きい整数で，真の約数をもたない n を素数という[2]。すなわち，$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots\ldots$ である。

定理 2（素因数分解） 合成数は素数の積に分解され，その分解のされ方は順序を除いては一通りである。

この定理によって，素数のいろいろな性質が証明される。例えば，素数 p に対して，$\sqrt{p}$ は無理数であることも，簡単に証明できる。

問題 4. $\sqrt{p}$ （p は素数）と $\sqrt{30}$ が無理数であることを証明せよ。

ではそもそも素数は無限にあるのだろうか？それとも最大の素数はあるのだろうか？実はこのことはすでに古代ギリシャの時代にわかっていた。ユークリッドによって次のことが証明されている。

定理 3. 素数は無限にある。

[2] 1 は素数でも合成数でもないとする。

証明. 背理法で示す。有限個であると仮定する。すると，すべての素数を $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, \ldots, p_n$ と書き表すことができる。このとき，自然数

$$q = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$$

を考える。q は1 より大きいので合成数か素数のどちらかである。もし素数とすると q はどの p_i とも異なるので仮定に反する。一方合成数とすると，いずれかの p_i で割り切れるはずであるが，q を p_i で割ると 1 余り，割り切れない。よっていずれにしても矛盾である。□

高校生のガウスは素数が自然数全体の中でどのように分布しているか膨大な計算をもとに考察し次の予想を得た：

“n 以下の素数の個数はおよそ $n/\log n$”である[3]。

実際の素数分布の様子は次の表の通りである。

n	$n/\log n$ (切り捨て)	素数の数	誤差 (%)
10^2	21	25	16
10^3	144	168	14
10^4	1085	1229	12
10^5	8685	9593	9
10^6	72382	78499	8
10^7	620420	664579	7
10^8	434294493	455052512	5

この予想はおよそ 100 年後の 1896 年アダマールとプーサンによって証明された。素数に関する未解決問題は今でも沢山ある。例えば，

双子素予想 p が素数であるとき，$p+2$ も素数であるものは無数にある (cf. [4])

Goldbach の問題 4 以上の偶数は 2 個の素数の和として表せる (cf. [4])。

問題 5. このことを 20 以下の偶数について確かめてみよ。

7.3 ガウス語録

ガウスの言葉の中に，私たちに参考になる数学の学習法や研究法が述べられている。

(1) もし他の人々が，わたしがしたと同じように深く，たえず数学的真理に没入していたならば，かれらはわたしのなした発見を自分たちでなしとげたでしょう。(cf.[3])

[3] $\log n$ は双曲線 $y = 1/x$ と 3 本の直線 $x = 1, x = n, y = 0$ で囲まれる面積である。詳しくは数学 II, III で学ぶ。

(2) 少なくとも予に於いては高等整数論の研究は今もこの後も数学中最上のもので，如何ほど美しい天文学上の発見でも高等整数論が与える喜びに比べれば言うに足りないのである。(cf.[2])

ガウスは無意識に数学的観念に心をうばわれていたという。彼はやりとげるまで意識的に全精力を難問の解決に集中できた。··· しばしば数日間あるいは数週間も無益にある研究をつづけたあげく，眠れない夜の明けた後，突然暗雲が切り開かれ，全解決が念頭に浮かんだことも再三である。烈しくそして永続的に注意を集中し得る能力は，彼の秘密の一部であった。(cf. [3])

参考文献

[1] Ｅ．Ｔ．ベル，　田中・銀林訳「数学をつくった人びと」東京図書

[2] 高木貞治,「近世数学史談」共立全書 183 あるいは岩波文庫　青 939-1

[3] ハッル,「数学のアイデア（甦るガウスの夢）」東京図書

[4] 今野紀雄「図解雑学　数の不思議」ナツメ社