代 数 系 I 演 習 問 題

* $\boxed{1}$ 環において $a0 = 0a = 0,\ a(-b) = (-a)b = -ab,\ (-a)(-b) = ab$ が成立することを示せ。

* $\boxed{2}$ 環が単位元をもてば，それはただ一つである。

以下環は単位元をもつとする。

* $\boxed{3}$
(1) R の単元全体は乗法に関して群をつくる。
(2) 単元は零因子ではない。

$\boxed{4}$ 2 元からなる環をすべて求めよ。次に 3 元のときも求めよ。

$\boxed{5}$ *（１）$R = \mathbb{Z}[\sqrt{-2}] = \{m + n\sqrt{-2} \mid m,\ n \in \mathbb{Z}\}$ は環になることを証明し，単元をすべて求めよ。
（２）$R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{m + n\sqrt{2} \mid m,\ n \in \mathbb{Z}\}$ のとき同様のことを考えよ。単元はどのようなものか？

$\boxed{6}$ 実数全体の部分集合 $\mathbb{Z} + \sqrt[3]{2}\mathbb{Z}$ は環になるかどうか？

* $\boxed{7}$ $\mathbb{Z}$ の元を成分とする 2 次正方行列の全体を $R = M_2(\mathbb{Z})$ とする。このとき R は環になることを示し，その単元をすべて求めよ。

* $\boxed{8}$ ベクトル空間 V に対して V から V への線形写像全体の集合を R とする。このとき R の 2 元 $f,\ g$ に対して，

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a),\quad (fg)(a) = f(g(a)),\ a \in R$$

と定義すると，この和と積で R は環になる。

$\boxed{9}$ $\mathbb{C}$ 上の全行列環の部分集合 $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$ は非可換体になる。

$\boxed{10}$ 集合 S の部分集合全体を R とする。$A, B \in R$ に対して

$$A + B = A \cup B - A \cap B,\ A \cdot B = A \cap B$$

とすると，R はこの演算で環になるかどうか？
$\boxed{11}$ （１）$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ のべき等元 (すなわち，$x^2 = x$ for $x \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$) を求めよ。
（２）単位元をもつ環 R の任意の元がべき等 (すなわち，$x^2 = x$ for any $x \in R$) であれば，R は可換環で R のすべての元 a に対して $2a = 0$ になる。

$\boxed{12}$ (1) ab が左零因子なら，a または b が左零因子である。

(2) 環 R の 1 と異なるべき等元は零因子である。

$\boxed{13}$ （１）可換体は整域である。
（２）有限個の元からなる整域は体である。

$\boxed{14}$ p を素数とするとき，$\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \dfrac{m}{n} \mid m,\ n \in \mathbb{Z}, (n,p) = 1 \right\}$ は $\mathbb{Q}$ の部分環であることを示せ。また $\mathbb{Z}_{(p)}$ の可逆元は何か？

$\boxed{15}$ a を R の単位元 1 ではない R のベキ等元とするとき，次の問いに答えよ。
（１）$b = 1 - a$ は R のベキ等元である。
（２）$ab = ba = 0$
（３）$aR \cap bR = \{0\}$
（４）aR と bR は R の演算に関して環となるが，R の部分環ではない。
（５）$f : R \longrightarrow aR\ (f(r) = ar)$ は準同型写像で $\mathrm{ker} f = bR$。
（６）R の任意の元は aR と bR の和として一意的に表される。

* $\boxed{16}$ 剰余環 $\mathbb{Z}_{12} = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ に関して、可逆元、零因子、べき零元をすべて求めよ。

* $\boxed{17}$ $M_2(\mathbb{R})$ において、、

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

とすると、I は $M_2(\mathbb{R})$ の右イデアルであるが、左イデアルではないことを証明せよ。

* $\boxed{18}$ 剰余環 $\mathbb{Z}_6$ 　のすべてのイデアルを求めよ。

* $\boxed{19}$ （１）R の元を a とするとき，$A(a) = \{x \in R \mid xa = 0\}$ によって定義される集合は R のイデアルである。
（２）$R = \mathbb{Z}$ のとき $A(a)$ を求めよ。
（３）$R = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ とするとき $A(\bar{3})$ を求めよ。

* $\boxed{20}$（１）I を体 K の 0 でないイデアルとするとき，$I = K$ である。
（２）R が体であるための必要十分条件は，R が 0 と R の他にはイデアルをもたないことである。

* $\boxed{21}$ 環 R の元 a がべき零（ある自然数 n に対して $a^n = 0$ となる）なら、$a - 1$ は単元である。

*$\boxed{22}$ f を環 R から環 R' への準同型写像とする。このとき，次のことを証明せよ。
(1) $f(0) = 0'$
(2) $f(-a) = -f(a)$
(3) f が単射であることと，核が 0 であることは同値である。
(4) f の核は R のイデアルになる。
(5) f の像は R' の部分環になる。ではイデアルになるか？

*$\boxed{23}$ 環から環への準同型写像の合成写像は準同型写像になることを示せ。

*$\boxed{24}$ 体から環への準同型写像は単射であるか，零写像であることを示せ。

*$\boxed{25}$ 写像 $f : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(p(x)) = p(\sqrt{2})$ と定義する。
(1) f は準同型写像であることを示せ。
(2) f の核を求めよ。
(3) この f による像を求め，準同型定理を説明せよ。

$\boxed{26}$ $\mathbb{Z}[x]/(2x-1)$ はどのような環か？（元はどのように表せるか？）

$\boxed{27}$ R のイデアルについて次の式が成立することを証明せよ。
(1) $I + J = J + I$, $IR = I$, $I + R = R$
(2) $(I \cap J)(I + J) \subset IJ$
(3) M を R の部分集合とするとき、$I : M = \{\, a \in R \mid aM \subset I\}$ とおくとこれは R のイデアルになる。これをイデアル商という。
(4) $J_1 \supset J_2$ ならば $I : J_1 \subset I : J_2$
(5) $I \supset J$ である必要十分条件は $I : J = R$

$\boxed{28}$ R のイデアル I と J にたいして $\{\, a \cdot b \mid a \in I,\ b \in J\}$ がイデアルにならない例を作れ。

* $\boxed{29}$ 整数環 $\mathbb{Z}$ において，素数 p に対して (p) は極大イデアルになること，および (0) は素イデアルであることを証明せよ。

* $\boxed{30}$ $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ のイデアル $\mathfrak{p} = (2, \sqrt{10})$ は素イデアルであることを証明せよ。

* $\boxed{31}$ (1) $\mathbb{Q}[x, y]$ のイデアル (x) は素イデアルであるが極大イデアルではないことを示せ。
(2) $\mathbb{Z}[x]$ のイデアル (x) も素イデアルであるが，極大イデアルでないことを示せ。

* $\boxed{32}$ I を環 R のイデアルとすると，I を含む R のイデアルと，R/I のイデアルとは１体１対応し，その対応は包含関係を変えない。

* $\boxed{33}$ 環 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ のイデアルは $m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $m|n$ である。

$\boxed{34}$ $\mathbb{Q}[x]/(x^2+2x^2+1)$ と $\mathbb{C}[x]/(x^4+2x^2+1)$ のイデアルをすべて求めよ。

* $\boxed{35}$ I を環 R のイデアルとするとき，次がなりたつ。
（１）I は素イデアルである $\Longleftrightarrow$ R/I は整域である。
（２）I は極大イデアルである $\quad\Longleftrightarrow\quad$ R/I は体である。
（３）L が極大イデアルならば，I は素イデアルである。

* $\boxed{36}$ （１） p を素数とするとき，体 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ において自分自身が逆元となっているのは $\bar{1}$ と $\overline{p-1}$ であることを示せ。
（２）（ウィルソンの定理）p が素数のとき，$(p-1)! \equiv -1 \pmod p$ を示せ。

$\boxed{37}$ $f : A \longrightarrow B$ を環の準同型写像とする。f^{-1} は B の素イデアルを A の素イデアルに移すことを示せ。では B の極大イデアルを A の極大イデアルに移すといえるか？

$\boxed{38}$ $\mathbb{Z}_{(5)} = \{\ q \in \mathbb{Q} \mid q = m/n,$ ただし，$m.n \in \mathbb{Z}, 5 \nmid n\}$ は局所環になることを示せ。また極大イデアルを求め，さらにこれによる剰余環を求めよ。

$\boxed{39}$ $\mathbb{R}\{x\}$ を 0 の近傍での解析関数全体の集合とする。これも局所環であることを示し，極大イデアルを求めよ。ではこれの商体はどういうものか？

$\boxed{40}$ R を可換環として，R の素イデアル全体の集合を $Spec(R)$ と表す。
(1) $R = \mathbb{Z},\ \mathbb{R}[x],\ \mathbb{C}[x]$ のとき，$Spec(R)$ を求めよ。
S が R の部分集合のとき $V(S) = \{\mathfrak{p} \in Spec(R) \mid S \subset \mathfrak{p}\}$ とおく。
(2) $I(S)$ を S の生成する R のイデアルとすれば，$V(S) = V(I(S))$ である。

$\boxed{41}$ 問 35 の続き。S が１つの要素 f からなる集合のとき, $V(\{f\}) = V(f)$ と表す。I, J, I_λ を R のイデアルとするとき，次の関係を証明せよ。
(1) $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J) = V(IJ)$
(2) $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda) = V(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)$, ここで $\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ は I_λ $(\lambda \in \Lambda)$ で生成されたイデアルである。
(3) $V(1) = \emptyset,\ V(0) = Spec(R)$ である。

(4) $V(I) \subset V(J) \iff \sqrt{J} \subset \sqrt{I}$

従って，上記 (1) ～ (3) によって，$Spec(R)$ には $V(I)$ を閉集合とする位相が入る。この位相を Zariski 位相とよぶ。