代 数 系 I テスト問 題

2003.07.07. 実施（吉原）

$\boxed{1}$ 剰余環 $R = \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ に関して, 可逆元, 零因子, べき零元をすべて求めよ。

$\boxed{2}$ ガウスの整数環 $R = \mathbb{Z}[i]$ において次の問に答えよ。
(1) $3+i$ は $1+i$ で割り切れることを示せ。
(2) 単元をすべて求めよ。
(3) $2, 2+i$ は R の既約元であるかどうか答えよ。
(4) 剰余環 $K = R/(3)$ は体になる理由を示し，K の元を係数とする方程式 $x^2 + x + 1 + i = 0$ の K での解を求めよ。

$\boxed{3}$ 次の各主張が正しければ証明し，間違っていればその理由を述べよ。
(1) R と S は可換環であるとし，$f : R \longrightarrow S$ は準同型写像で $f(1_R) = 1_S$ であるとするとする。このとき，
(a) $f(0_R) = 0_S$.
(b) u を R の単元とすると $f(u)$ は S の単元。
(c) a を R の零因子とすると $f(a)$ は S の零因子。

(2) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ への自明でない準同型写像がある。
(3) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ への自明でない準同型写像がある。

$\boxed{4}$ 環 $R = \mathbb{Q}[x]$ について， $f = x^2 + 9, g = x^2 - 9$ とするとき次の問に答えよ。
(1) それぞれ f, g で生成されたイデアルは極大イデアルであるかどうか，理由を付けて答えよ。もし極大イデアルでなければ，そのイデアルを含む極大イデアルを求めよ。
剰余環 $R/(f)$ で x の類を j とする。
(2) $R/(f)$ で $1+j$ は単元であることを示し，その逆元を求めよ。