

代数系 I 小テスト問題
2004.06.14. 実施 (吉原)

① 成分が実数の 2×2 の三角行列全体の集合

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

について次の問に答えよ。

- (1) R は普通の行列の演算で環になることを示せ。 R は可換環か？
- (2) R の単元をすべて求めよ。
- (3) R の左零因子をすべて求めよ。
- (4) R のべき零元をすべて求めよ。
- (5) R の元で単元でないものは、左か右の零因子になるかどうか？

② 多項式環 $R = \mathbb{R}[x]$ について以下の問に答えよ。

(1) $f \in R$ に対して $f(1) = 0$ なら f は $x - 1$ で割り切れることを証明せよ。

(2) $I = \{f \in R \mid f(1) = 0\}$ とすると、 I は R のイデアルになるかどうか、理由を付けて答えよ。

(3) $f \in R$ に対して $f(\sqrt{-1}) = 0$ なら f は $x^2 + 1$ で割り切れることを証明せよ。

(4) $J_1 = \{f \in R \mid f(1) = 0 \text{ or } f(\sqrt{-1}) = 0\}$ とすると、 J_1 は R のイデアルになるかどうか、理由を付けて答えよ。

(5) $J_2 = \{f \in R \mid f(1) = 0 \text{ and } f(\sqrt{-1}) = 0\}$ とすると、 J_2 は R のイデアルになるかどうか、理由を付けて答えよ。