

代数系 I テスト問題
2004.08.02. 実施(吉原)

1 整数環 \mathbb{Z} に関して次の問に答えよ。

- (1) イデアル $(21, 24)$, $(21) \cap (24)$ の生成元を求めよ。
- (2) イデアル $I = (24)$ を含むイデアルをすべて求めよ。
- (3) $R = \mathbb{Z}/(24)$ の単元をすべて求めよ。
- (4) R の各単元 $u (\neq 1)$ に対して, u^n が R の単位元になるような, 最小の n を求めよ。

2 環 $R = \mathbb{Z}[i]$ について以下の問に答えよ。

- (1) R において 2 と 7 は既約元であるかどうか答えよ。既約元でなければ既約分解せよ。
- (2) R の元で実部と虚部が偶数からなる部分集合を I とすると, I はイデアルになることを示せ。 I は極大イデアルかどうか?
- (3) R/I の要素の個数を求めよ。

3 $R = \mathbb{Z}[i]$ から \mathbb{Z} を成分とする 2 次全行列環 $M_2(\mathbb{Z})$ への写像 φ を

$$\varphi(m + ni) = \begin{pmatrix} m & -n \\ n & m \end{pmatrix}$$

で定義する。このとき次の問に答えよ。

- (1) φ は環の単射準同型写像であることを示せ。
- (2) φ の像 $\varphi(R)$ を S とする。 S において $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ を既約分解せよ (ヒント: 2 の (1) を参照)。

4 有理数からなる集合 $R = \{m/5^n \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$ について次の問に答えよ。

- (1) R は普通の有理数の加法と乗法で環になることを示せ。
- (2) R の単元を求めよ。
- (3) R の元で分子が偶数のもの全体 $\{2k/5^n \mid k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$ は極大イデアルになることを示せ。