

代数系 I 小テスト問題
2005.06.06. 実施 (吉原)

1 整数環 $R = \mathbb{Z}$ に関して以下の問いに答えよ。

(1) 次の部分集合はそれぞれイデアルになるかどうか, 簡単な理由と共に答えよ。

(i) 5 で割ると 1 余る数全体。 (ii) 3 の倍数と 5 の倍数の和集合。 (iii) 3 の倍数と 5 の倍数の共通部分。

(2) $I = (15), J = (21)$ とするとき $I + J, I \cap J$ を求めよ。

(3) I を含むイデアルをすべて求めよ。

2 係数が整数の多項式環 $R = \mathbb{Z}[x]$ に関して以下の問いに答えよ。

(1) $I = \{f \in R \mid f(\sqrt{2}) = 0\}$ は R のイデアルになることを示せ。

(2) I はどのような元で生成されているか?

(3) R の単元を求めよ。