代 数 系 I テスト 問 題

2005.07.25. 実施（吉原）

$\boxed{1}$ 環 R は可換で単位元 1 を持つとする。 I は R のイデアルとして，以下の問いに答えよ。

(1) $R = I$ である必要十分条件は I が単元を含むことである，を証明せよ。

(2) $a,\ b \in R$ に対して，$a \sim b$ を $a - b \in I$ として定義すると，$\sim$ は同値関係をみたすことを証明せよ。

(3) $a \sim a',\ b \sim b'$ のとき，$a + b \sim a' + b',\ ab \sim a'b'$ を証明せよ。

$\boxed{2}$ 整数環 $\mathbb{Z}$ に関して次の問に答えよ。

(1) 整数 m と n が互いに素なとき，$mx + ny = 1$ をみたす整数 $x,\ y$ が存在することをイデアル論の立場から証明せよ。

(2) イデアル $(21, 110),\ (21) \cap (110)$ の生成元を求めよ。

(3) イデアル $I = (110)$ を含むイデアルをすべて求めよ。

(4) 0 でない素イデアル P は極大イデアルであることを証明せよ（$\mathbb{Z}$ は PID であることを用いてもよい）。

以下剰余環 $R = \mathbb{Z}/(21)$ に関して次の問に答えよ。

(5) $R = \mathbb{Z}/(21)$ の零因子と単元をすべて求めよ。

(6) R の元 $\overline{2}$ に対して $\overline{2}^n$ が R の単位元になるような，最小の n を求めよ。

$\boxed{3}$ 環 $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ について以下の問に答えよ。

(1) R の単元を求めよ。

(2) R において 2 と $1 + \sqrt{-5}$ は既約元であることを証明せよ。

(3) 6 を R において既約元に分解せよ。

(4) R において 2 と $1 + \sqrt{-5}$ は素元でないことを証明せよ。

(5) 環として R と $\mathbb{Z}$ の違いは何か？