代 数 系 II 演 習 問 題

1. 下記の $f(x)$ に対して $f(x)=0$ の１根を θ とするとき，$2/(\theta^2-1)$ を有理数を係数とする，次数が $f(x)$ の次数より小さい θ の多項式で表せ。
   (a) $f(x)=x^2+2x+3$
   (b) $f(x)=x^3-2x^2-4x+6$
   (c) $f(x)=x^4+2x^2+5$
2. L を K の拡大体とするとき，L は K の上のベクトル空間とみなせることを証明せよ。
3. L は K の有限次拡大とし，M はその中間体とするとき，次のことを証明せよ。
   (a) $[L:K]$ が素数なら，$L=M$ または $M=K$ である。
   (b) $[L:K]=[M:K]$ ならば $L=M$ である。
   (c) $[L:M]=[L:K]$ ならば $M=K$ である。
4. K, K' を体とし，$f: K \longrightarrow K'$ 体の準同型写像とするとき，次のことを証明せよ。
   (a) f は 0 写像か，単射である。
   (b) f が 0 写像でなければ，K と K' の標数は等しい。
   (c) f が 0 写像でなく，K と K' が同じ素体 K_0 を含めば，f を K_0 に制限したものは K_0 の恒等写像である。
5. 整域 R が体 K を含み，ベクトル空間として R は K 上有限次元ならば，K は体であることを証明せよ。
6. 次のことを証明せよ。
   (a) $a+b\sqrt{n}, (a,b,n \in \mathbb{Q})$ の全体は体をなす。
   (b) $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}, (a,b,c \in \mathbb{Q})$ の全体は体をなす。
   (c) $1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$ は $\mathbb{Q}$ 上１次独立である。
7. 次のことを証明せよ。
   (a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}$ である。
   (b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$
   (c) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ は $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}, (a,b,c,d \in \mathbb{Q})$ の全体からなる。
8. 次の問に答えよ。
   (a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ から $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ への $\mathbb{Q}$ の上の同型は存在しないことを証明せよ。
   (b) 整数 n に対して，$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ から $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ への $\mathbb{Q}$ の上の同型が存在するとき，n を求めよ。
9. 次の α, β に対して，$\alpha+\beta$ と $3\alpha+2\beta$ の $\mathbb{Q}$ の上のそれぞれの最小多項式を求めよ。
   (a) $\alpha=1, \beta=\sqrt{5}$
   (b) $\alpha=\sqrt{2}, \beta=\sqrt{3}$
   (c) $\alpha=\sqrt{-1}, \beta=\sqrt[3]{2}$
10. 次の問に答えよ。
   (a) 2 次方程式 $x^2+px+q=0$ の解の公式を導け.

(b) 係数が実数の３次方程式 $f(x) = x^3 + px + q = 0$ は少なくとも１個の実根を持つことを示せ.

(c) 因数分解 $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$ を用いて (2) の方程式を解け．(hint: $x^3 + (-3yz)x + (y^3 + z^3)$ と変形)

11. 次の問に答えよ。
 (a) $F(x) \in \mathbb{Q}[x]$ について，$F(\sqrt{2}) = 0$ ならば，$F(x)$ は $\mathbb{Q}[x]$ において $x^2 - 2$ で割り切れることを示せ.
 (b) $x^2 - 2$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{3})[x]$ で既約かどうか理由をつけて答えよ.
 (c) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ とする，もし $F(x) \in \mathbf{Q}[x]$ について，$F(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 0$ ならば．$F(x)$ は $\mathbb{Q}[x]$ において，$f(x)$ で割り切れることを示せ.

12. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(a\sqrt{2} + b\sqrt{3})$ がなりたつ有理数 a, b の条件を求めよ。

13. 次の問に答えよ。
 (a) $Aut(K)$ を次のとき求めよ。
 $K = \mathbb{Q}$,　$K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$,　$K = \mathbb{Q}(\alpha)$, ただし，α は $\mathbb{Q}$ 上 2 次の既約な多項式の根。　$K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$,　$K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$,　$K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \omega)$,　$K = \mathbb{Q}(\exp(2\pi\sqrt{-1})/5)$,　$K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$　$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt[4]{2})$.
 (b) $Aut(L/K)$ を次のとき，求めよ　$L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}), K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

14. 次の問に答えよ。
 (a) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ と置くとき，次の問に答えよ。
 (b) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$　の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式 $f(x)$ を求めよ。
 (c) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$　であることを証明せよ。
 (d) $\mathbb{Q}[x] \,/\, (f(x)) \cong K$　であることを証明せよ。
 (e) $[K : \mathbb{Q}]$　を求めよ。
 (f) $K \,/\, \mathbb{Q}$　はガロワ拡大であることを証明し，そのガロワ群を求めよ。
 (g) $K \,/\, \mathbb{Q}$　の中間体をすべて求めよ。

15. θ を $\mathbb{Q}$ 上代数的な元とするとき $\mathbb{Q}(\theta) \,/\, \mathbb{Q}$ の中間体の個数は有限であることを証明せよ。

16. 次の各問いに答えよ。
 (a) 代数拡大の定義を述べよ。また代数拡大でない例を一つかけ。
 (b) 体の標数は素数であることを証明せよ。
 (c) 定規とコンパスで角６０度を三等分する作図が不可能なことの理由（証明の概略）を述べよ。

17. 次の問に答えよ。
 (a) 方程式 $f(x) = x^4 - 8x^2 + 15 = 0$ のすべての根を $\mathbb{Q}$ に添加して得られる体は $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ であることを示せ.
 (b) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$　の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式 $g(x)$ を求めよ。
 (c) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{5})$　であることを証明せよ。

(d) $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間 K の次元（あるいは体の拡大次数）$[K:\mathbb{Q}]$ を求めよ。

(e) ガロワ群 $G = K/\mathbb{Q}$ を求めよ。特に G の単位元以外の元の位数は２であることを示せ.

(f) K / $\mathbb{Q}$　の中間体をすべて求めよ。