代 数 系 I テスト 問 題

2006.07.31. 実施（吉原）

次の問 $\boxed{1}$〜$\boxed{3}$ のすべてかまたは $\boxed{4}$ を解け。

$\boxed{1}$ 整数環 $R = \mathbb{Z}$ と環 $S = \mathbb{Z}/(12)$ について，以下の問いに答えよ。
(i) 整数 m と n が互いに素なとき，$mx + ny = 1$ をみたす整数 $x,\ y$ が存在することをイデアル論の立場から証明せよ。
(ii) (5) は R の極大イデアルであることを示せ。また R において (12) を含むイデアルをすべて求めよ。
(iii) S の単元をすべて求めよ。
(iv) S の零因子をすべて求めよ。

$\boxed{2}$ α, β を環 $\mathbb{Z}[x]$ から環 $\mathbb{R}$ への写像で $f \in \mathbb{Z}[x]$ に対して $\alpha(f) = f(1/2),\ \beta(f) = f(\sqrt{2})$ を対応させるものであるとする。このとき，次の問に答えよ。
(1) α と β は環の準同型写像であることを示せ。（どちらか一方を示せばよい。）
(2) α と β の核を求めよ。
(3) α と β の像はどのような元からできているか具体的に表せ。
(4) α と β の核の共通部分はどんなイデアルか？

$\boxed{3}$ (1) 整域 R において元 a が既約元であることの定義を述べよ。
(2) $R = \mathbb{Z}[x], S = \mathbb{R}[x],\ f(x) = x^3 - 2x + 1,\ g(x) = x^3 - 2x + 2$ とするとき，f と g がそれぞれ R と S で可約であるかどうか調べよ。

==============

$\boxed{4}$ R を可換環として，R の素イデアル全体の集合を $\mathrm{Spec}(R)$ と表わし，I を R のイデアルとするとき，

$$V(I) = \{\ P \in \mathrm{S}pec(R) \mid I \subset P\ \}$$

とおく。このとき以下の問いに答えよ。
(1) $V((0)) = \mathrm{S}pec(R),\ V(R) = \emptyset$ を示せ。
(2) R のイデアル I, J に対して $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$ が成立することを示せ。
(3) $I_\lambda,\ \lambda \in \Lambda$ を R のイデアルとするとき，

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(I_\lambda) = V(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda)$$

が成立することを示せ。従って，上記 (1) ∼ (3) によって，$\mathrm{Spec}(R)$ には $\{V(I)\}$ を閉集合とする位相が入る。この位相を Zariski 位相とよぶ。
(4) $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ での閉集合はどのようなものか？