

代数系 I 小テスト 問題
2008.06.16. 実施 (吉原)

□1 以下の各問いに答えよ。

(1) $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ の可逆元 (=単元)、零因子、べき零元をすべて求めよ。

(2) R を可換環とすると、 R のべき零元全体

$$N(R) = \{ a \in R \mid \exists n \in \mathbb{N}, a^n = 0 \}$$

はイデアルになることを示せ。

□2 集合 $R = \mathbb{Z} \left[\frac{1 + \sqrt{d}}{2} \right] = \left\{ m + \frac{1 + \sqrt{d}}{2}n \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\}$ に関し

て、以下の問いに答えよ。

(1) $d \equiv 1 \pmod{4}$ のとき、 R は環になることを示せ。

(2) $d = 3$ のとき、 R は環になるか？

(3) $d = -3$ のとき、 R の単元をすべて求めよ。