

代数系 I 小テスト 問題  
2008.06.16. 実施 (吉原)

□1 以下の各問いに答えよ。

(1)  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$  の可逆元 (= 単元)、零因子、べき零元をすべて求めよ。

(2)  $R$  を可換環とすると、 $R$  のべき零元全体

$$N(R) = \{ a \in R \mid \exists n \in \mathbb{N}, a^n = 0 \}$$

はイデアルになることを示せ。

□2 集合  $R = \mathbb{Z} \left[ \frac{1 + \sqrt{d}}{2} \right] = \left\{ m + \frac{1 + \sqrt{d}}{2}n \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\}$  に関し

て、以下の問いに答えよ。

(1)  $d \equiv 1 \pmod{4}$  のとき、 $R$  は環になることを示せ。

(2)  $d = 3$  のとき、 $R$  は環になるか？

(3)  $d = -3$  のとき、 $R$  の単元をすべて求めよ。